

# INTERVALO BAYESIANO Y FRECUENTISTA PARA LA PROPORCIÓN EN LA DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL: UN ESTUDIO COMPARATIVO

Emmanuel Morales García\*, Julia Aurora Montano Rivas\*, Ernesto Pedro Menéndez Acuña\*\*<sup>1</sup> y Cecilia Cruz López\*

\*Facultad de Estadística e Informática, Universidad Veracruzana, Xalapa, México

\*\*Facultad de Matemáticas, Universidad Veracruzana, Xalapa, México

## ABSTRACT

Confidence intervals and credibility intervals for the proportion of a multinomial distribution are applied to understand the uncertainty that is related to the estimation of parameters and events in their various categories. By comparing the intervals of both approaches and verifying their behavior, the one that reports the best results was identified. The Wald method was developed to obtain confidence intervals for estimating the proportion. In the Bayesian case, the Dirichlet distribution, which is the conjugate of the multinomial, was used as a priori distribution. The Markov chains computational method via Monte Carlo was implemented to generate the simulation and obtain the *a posteriori* distribution. To show the application of both approaches, data from nine forms of nullity of electoral ballots from the Elections for Deputies of the State of Veracruz, Mexico, from the year 2016 were used. The development led us to conclude that the Bayesian method gives a better result with respect to the frequentist, although the difference between them is minimal, the credibility intervals have a smaller width which implies greater precision.

**KEY WORDS:** Dirichlet distribution, credibility interval, confidence interval, Markov Chains.

**MSC:** 62E15, 62F15, 62F25, 60J20

## RESUMEN

Los intervalos de confianza e intervalos de credibilidad para la proporción de una distribución multinomial se aplican para entender la incertidumbre que está relacionada con la estimación de parámetros y los eventos en sus diversas categorías. Al realizar la comparación de los intervalos de ambos enfoques y verificar su comportamiento, se identificó el que reporta mejores resultados. Se desarrolló el método de Wald para la obtención de los intervalos de confianza para la estimación de la proporción. En el caso bayesiano, se utilizó como distribución a priori la Dirichlet, la cual es la conjugada de la multinomial. Se implementó el método computacional cadenas de Markov vía Monte Carlo para generar la simulación y obtención de la distribución a posteriori. Para mostrar la aplicación de ambos enfoques, se usaron datos de nueve formas de nulidad de boletas electorales de las elecciones para diputados del Estado de Veracruz, México, del año 2016. El desarrollo llevó a concluir que el método bayesiano da mejor resultado con respecto al frecuentista, aunque la diferencia entre ellos es mínima, los intervalos de credibilidad presentan menor amplitud lo que implica mayor precisión.

**PALABRAS CLAVE:** Distribución Dirichlet, Intervalo de credibilidad, Intervalo de confianza, Cadenas de Markov.

## 1. INTRODUCCIÓN

Dentro de la estadística moderna existen dos enfoques principales que se destacan en la estimación de parámetros: el frecuentista y el bayesiano. Ambos enfoques buscan obtener estimaciones precisas; sin embargo, difieren en sus fundamentos y en el tratamiento de la incertidumbre. Este estudio se centra en comparar los intervalos de confianza y credibilidad para la proporción en la distribución multinomial un aspecto fundamental en la estadística.

Para entender mejor las diferencias entre estos enfoques, es útil revisar brevemente los procedimientos fundamentales de la estadística inferencial clásica.

El contraste de hipótesis, la estimación puntual y estimación por intervalo, son procedimientos de la estadística inferencial clásica, la cual tiene como objetivo estimar los valores de los parámetros a través de una o varias muestras

<sup>1</sup> [emenendez@uv.mx](mailto:emenendez@uv.mx) (autor por correspondencia)

de datos de la población de interés. La precisión de los estimadores depende del tamaño de la muestra y del proceso de selección de los datos; es decir, a medida que aumenta el tamaño de muestra el valor del estimador se acerca más al valor del parámetro. La muestra la llamaremos representativa si para su determinación usamos un método de muestreo ([15][8][14]).

Por otra parte, se tiene el enfoque inferencial bayesiano, este involucra información previa subjetiva que no es obtenida de la muestra. Se basa únicamente en los datos observados; es decir, se conjuga las creencias a priori con toda la evidencia observada con la finalidad de tener una distribución posterior, esta es la representación de las probabilidades encontradas después de la observación de datos. La diferencia que existe entre la inferencia clásica y la bayesiana es que en la primera la probabilidad es objetiva y en la segunda subjetiva; o sea, la creencia que tiene una persona en un evento cualquiera ([20][4]).

La comparación de los enfoques es importante en la estimación de proporciones dentro de distribuciones multinomiales, dado que en ambos se ofrecen perspectivas diferentes sobre la incertidumbre y la toma de decisiones basadas en los datos. Mientras que el enfoque frecuentista se centra en la repetición de experimentos hipotéticos, el enfoque bayesiano permite incorporar información anterior y ajusta probabilidades conforme se observa nueva evidencia ([9]). Comprender las ventajas y limitaciones de cada enfoque en este contexto es crucial para los investigadores y profesionales que buscan realizar inferencias precisas y robustas.

Por lo anterior, en esta investigación se realizó un análisis comparativo del enfoque bayesiano y frecuentista para la construcción de intervalos de credibilidad y de confianza para los parámetros de proporción de la distribución multinomial, utilizando datos sobre nueve formas de votos nulos, obtenidos de la contienda electoral en el Estado de Veracruz del año 2016. Se aplicaron ambos enfoques encontrando la mejor solución de la estimación para la proporción.

## 2. LA DISTRIBUCIÓN MULTINOMIAL

La distribución multinomial ( $\sim M$ ) pertenece a la familia discreta multivariante y es la representación extensa de la distribución binomial, también es conocida como distribución categórica; se efectúa cuando los sucesos tienen más de dos resultados (categorías) posibles, los cuales son mutuamente excluyentes y tienen la misma probabilidad de ocurrir en cada ensayo. Su utilidad principal es hacer inferencia basada en las probabilidades (proporciones) para cada categoría a estudiar ([11][3][1]). Su función de probabilidad esta dado como:

$$f(x_1, \dots, x_k; p_1, \dots, p_k, n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(x_i+1)} \prod_{i=1}^k p_i^{x_i}$$

En la  $\sim M$  los valores  $x_i$  de los  $n$  sucesos independientes son resultados que dependen de las probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_k$  asociadas a cada categoría, tal que  $p_i \geq 0$  para  $i = 1, \dots, k$  y  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$  ([18]). La distribución multivariada se emplea cuando se tienen más de dos variables que se desean estudiar al mismo tiempo, si los datos de las características son categóricos, entonces se puede aplicar la  $\sim M$  si el interés es calcular la probabilidad de las respuestas en una variable ([11]).

**Definición 1.** Sea  $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ , una v.a. *k-dimensional*, se considera que tiene una distribución multinomial con parámetros  $n, p$ , donde  $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$  dado lo anterior se denota de la siguiente manera  $X \sim M(n; p_1, p_2, \dots, p_k)$ .

Para la finalidad de esta investigación se enfatiza la distribución Dirichlet, es común implementarla cuando se realizarán tareas de inferencia bayesiana y se utilizan distribuciones con múltiples categorías. Su utilidad radica en su capacidad para modelar la incertidumbre y variabilidad en las probabilidades asociadas a las diferentes categorías. La densidad de probabilidad, con vector de parámetros  $\alpha$ , se denota como:

$$Dir(\pi | \alpha_1, \dots, \alpha_m) = \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i)}{\prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)} \prod_{i=1}^k \pi_i^{\alpha_{i-1}}$$

Es una distribución continua multivariante, con parámetros  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  perteneciente al conjunto de números reales positivos. Es una generalización multivariante de la distribución Beta. El modelo que se introduce para presenciar a las variables debe tomar valores en el intervalo de cero y uno, cuya suma es igual a la unidad, la Dirichlet observar la variación de las proporciones ([13]).

Para obtener información más precisa sobre la proporción en una distribución multinomial, es necesario usar intervalos de confianza, ya que con una probabilidad de  $1 - \alpha$  todos los valores estimados se encuentre contenidos en los rangos

especificados por las verdaderas proporciones de la población estudiada ([18][19]). Para obtener intervalos de confianza de manera simultánea de los parámetros  $(p_1, p_2, \dots, p_k)$  de la distribución multinomial, se tienen que evaluar diversos procedimientos, ya que se consideran más precisos los resultados si la evaluación se realiza mediante el volumen de las regiones de confianza de probabilidad de cobertura nominal y la probabilidad que se obtiene de manera final ([17]).

### 3. INTERVALO DE CONFIANZA

Se conoce como intervalo de confianza (IC) al rango estadístico que ayuda a la obtención de una estimación de cierto parámetro poblacional  $(\mu, p, \tau)$ . Los IC, se componen de valores superiores e inferiores a la estimación, su amplitud y precisión depende del tamaño de muestra y de la variabilidad de los datos ([12]).

Para calcular el IC, se puede decir que se tiene una fórmula para cada parámetro que se desea estimar, por ejemplo, el intervalo de confianza para la media poblacional ( $\mu$ ) con desviación estándar poblacional desconocida es:

$$P\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

donde:

P: Indica la probabilidad

$\bar{x}$ : Media muestral

$z_{\alpha/2}$ : Valor crítico (es el cuantil de  $1 - \alpha/2$  asociado al nivel de confianza)

s: Desviación estándar muestral

n : Tamaño de la muestra

$1 - \alpha$ : Confianza del intervalo

Para estimar la proporción poblacional ( $p$ ), la desviación estándar de la muestra es

$s = \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})}$ , entonces la fórmula para el cálculo del intervalo es la siguiente:

$$P\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

donde:

$\hat{p}$ : Proporción muestral

Como se puede observar, a dicho intervalo depende de un nivel de confianza, el cual indica la confianza con la que contiene al parámetro poblacional estimado. Por defecto diversas investigaciones que utilizan este tipo de inferencia ocupan el 95% ([16]). Se dice que entre más estrecho sea el intervalo, se obtendrá una mejor precisión de la estimación.

### 4. INTERVALO DE CREDIBILIDAD

En el contexto bayesiano se tiene una muestra de datos con distribución verosímil  $L(x|\theta)$ , el parámetro  $\theta$  pasa a ser una variable aleatoria, la cual tiene una distribución a priori  $\pi(\theta)$ , dicha distribución es modificada con la información previa de  $\theta$ , de tal forma que al multiplicar la distribución a priori modificada por la verosímil se obtiene la distribución a posteriori  $\pi(\theta|x)$  ([10]), la cual se usa para realizar la estimación por intervalo.

A partir de la distribución a posteriori se puede obtener la estimación por intervalo de credibilidad o Bayesiano para  $\theta$  con un nivel creíble de  $1 - \alpha$ , en este caso, diremos que el intervalo contiene el valor de  $\theta$  sí cumple lo siguiente ([6]):

$$\int_a^b \pi(\theta|x)d\theta = 1 - \alpha$$

equivalente a

$$\int_{-\infty}^a \pi(\theta|x)d\theta = \int_b^{\infty} \pi(\theta|x)d\theta = \frac{\alpha}{2}$$

Para la estimación de los intervalos de credibilidad de las distribuciones a posteriori, partimos de que existe un espacio paramétrico  $\Theta$  y un subconjunto de éste que llamamos región de credibilidad  $C$ , por otra parte, sabemos que  $\theta$  es un valor desconocido, el cual asumimos que  $\theta \in \Theta$ , entonces la región de credibilidad  $(1 - \alpha)100\%$  para  $\theta$  es  $C \in \Theta$ , de tal forma que la  $P(\theta \in C|x) \geq 1 - \alpha$  ([11][5]).

En esta investigación, para obtener los intervalos de credibilidad de las proporciones se utilizó la distribución Dirichlet como a priori y la distribución multinomial como la función de verosimilitud, obteniendo el modelo Dirichlet-Multinomial. Este modelo puede observarse como la extensión del proceso binomial, utilizando como previa una distribución beta en su generalización multivariada ([2]). El proceso Dirichlet-Multinomial, se entiende de la siguiente manera:  $P_1, \dots, P_k \sim Dir(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  donde las  $P_i$  siguen una distribución Dirichlet con parámetros  $\alpha_i$ . Para las  $f_i$  se establece la siguiente fórmula  $f_1, \dots, f_k \sim Mult(P_1, \dots, P_k)$ , indicando que siguen una distribución multinomial con parámetros  $P_1, \dots, P_k$ .

## 5. DISTRIBUCIÓN A POSTERIOR

Modelo Dirichlet-Multinomial

La distribución a posteriori es equivalente al producto de la distribución Dirichlet y la función de verosimilitud de la multinomial.

$$\begin{aligned} f(\theta|D) &\propto f(\theta, D) \\ &= f(P_1, \dots, P_K | \alpha_1, \dots, \alpha_K) \prod_{y_i \in D} f(y_i | P_1, \dots, P_K) \\ &\propto \prod_{j=1}^K P_j^{\alpha_{j-1}} \prod_{y_i \in D} \prod_{j=1}^K P_j^{y_i^{(j)}} \\ &= \prod_{j=1}^K P_j^{\alpha_{j-1} + \sum_{i \in D} y_i^{(j)}} \end{aligned}$$

donde:  $f(\theta|D) = Dir(\alpha'_1, \dots, \alpha'_k)$

### 5.1 Distribución predictiva

Para esta distribución se realiza la integración de todos los posibles valores en  $\theta$ . En las operaciones algebraicas se involucra la función Gamma y las probabilidades de  $P_j$ .

$$\begin{aligned} f(y|D) &= \int f(y|\theta) f(\theta|D) d\theta \\ &= \int f(y|P_1, \dots, P_K) f(P_1, \dots, P_K | D) dS_K \\ &= \int \frac{\Gamma(n+1)}{\prod_{j=1}^K \Gamma(y^{(j)}+1)} \prod_{j=1}^K P_j^{y^{(j)}} \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^K \alpha'_j)}{\prod_{j=1}^K \Gamma(\alpha'_j)} \prod_{j=1}^K P_j^{\alpha_{j-1}} dS_K \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\prod_{j=1}^K \Gamma(y^{(j)}+1)} \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^K \alpha'_j)}{\prod_{j=1}^K \Gamma(\alpha'_j)} \int \prod_{j=1}^K P_j^{y^{(j)} + \alpha'_{j-1}} dS_K \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\prod_{j=1}^K \Gamma(y^{(j)}+1)} \frac{\Gamma(\sum_{j=1}^K \alpha'_j)}{\prod_{j=1}^K \Gamma(\alpha'_j)} \frac{\prod_{j=1}^K \Gamma(y^{(j)} + \alpha'_j)}{\Gamma(n + \sum_{j=1}^K \alpha'_j)} \end{aligned}$$

El valor esperado es

$$E[n_i] = E[E[n_i|\theta_i]] = N E[\theta_i] = \frac{N \alpha_i}{\sum_{j=1}^J \alpha_j}$$

En la siguiente parte se muestra el proceso de obtener el MAP, que es una estimación puntual de los parámetros que maximiza la probabilidad a posteriori.

### 5.2 La máxima a posteriori (MAP) o moda a posteriori

$$\hat{H} = argmax P(H|D) = argmax P(D|H)P(H)$$

Para distribuciones Dirichlet con parámetros  $\alpha$  el MAP es:

$$\hat{\theta}_j = \frac{\alpha_j - 1}{\sum_{j'=1}^m (\alpha'_{j'} - 1)}$$

y el MAP o moda a posterior para una Dir ( $N+\alpha$ ) para estimar  $\theta$ , es:

$$\hat{\theta}_j = \frac{N_j + \alpha_j - 1}{n + \sum_{j'=1}^m (\alpha'_{j'} - 1)}$$

si  $\alpha = 1$ , entonces el valor de  $\hat{\theta}_j = \frac{N_j}{n}$  es la máxima verosimilitud estimada (MLE) para  $\theta$ .

Para mostrar el procedimiento anterior se realizó una simulación usando el método Cadena de Márkov Monte Carlo (MCMC), y se calculó la distribución a posteriori para obtener los nuevos resultados del modelo propuesto.

Los Métodos de Monte Carlo Vía Cadena de Márkov (MCMC), son métodos de simulación para generar muestras de alguna distribución a posteriori y para estimar los parámetros de interés. Con los MCMC se simulan datos de una densidad propuesta, más no necesariamente debe ser parecida a la densidad a posteriori, además, cada valor generado depende solo del anterior valor simulado, de ahí la noción de cadena de Márkov ([7]).

## 6. APPLICACIÓN

Para mostrar la aplicación de los intervalos de confianza y de credibilidad, se usó la base de datos de los resultados de las elecciones electorales para diputados locales del Estado de Veracruz correspondientes al año 2016, en particular el apartado de las 9 formas de voto nulo (ver Tabla 1), datos que tienen una distribución multinomial, con los cuales se obtuvieron los intervalos para estimar los parámetros de proporción de cada categoría, lo que permitió comprender y analizar la dinámica política de la entidad Veracruzana.

El fenómeno del voto nulo ocurre por diversas razones en los procesos electorales y son representados crucialmente puesto que, se requiere atención y precisión en el análisis. Identificar y clasificar correctamente los votos nulos es importante para comprender la autenticidad y lo válido que pueden llegar a ser los resultados electorales. La aplicación de los enfoques estadísticos en estos datos resulta relevante, ya que se demuestra la efectividad de las técnicas empleadas, en el contexto político.

Formas	Codificación
1.- Boleta depositada en la urna sin marca alguna	C1V
2.- Marcas en toda la boleta que denotan cancelación o anulación	C2V
3.- Múltiples marcas que no denotan preferencia alguna por las opciones en la boleta	C3V
4.- Expresiones que denotan rechazo	C4V
5.- Expresiones que no representan ningún sentido de elección	C5V
6.- Marcas en 2 o más recuadros de candidatos y/o partidos no coaligados	C6V
7.- Marca/s en recuadro de un partido político o coalición que además contiene expresiones que generan contradicción o incertidumbre sobre la preferencia marcada.	C7V
8.- Marcas y/o expresiones en el recuadro de candidato no registrado que carece de elementos para otorgar el voto	C8V
9.- Voto válido anulado por funcionarios de casilla	C9V

**Tabla 1.** Formas de votos nulos

Para cada uno de los 30 distritos electorales locales, se contó el total de votos nulos de cada categoría y el total de votos nulos para calcular la proporción estimada para cada categoría, esto es,

$$\text{Proporción de voto nulo de la categoría } (i) = \frac{\text{Número de votos nulos de la categoría } (i)}{\text{Total de votos nulos del distrito } (j)}$$

donde  $i = 1, 2, \dots, 9$  y  $j = 1, 2, 3, \dots, 30$ , indican las categorías de voto nulo y los distritos, respectivamente.

Para el Distrito Pánuco, el cálculo de las proporciones de las primeras tres formas de voto nulo se muestra a continuación:

$$\text{Proporción por cada categoría 1} = \frac{485}{2807} = C1V = 0.17$$

$$\text{Proporción por cada categoría 2} = \frac{826}{2807} = C2V = 0.29$$

$$\text{Proporción por cada categoría 3} = \frac{185}{2807} = C3V = 0.06$$

En la Tabla 2, se muestra la proporción, así como los intervalos de confianza y el de credibilidad para cada una de las formas de voto nulo del primer distrito. Cabe mencionar que en este documento solo mostramos los resultados 4 distritos: Pánuco (distrito1), Coatzacoalcos (distrito 30), Boca del Río (distrito 16) y Veracruz (distrito 14).

### 6.1 Paqueterías y comandos en R versión 4.4.2.

A continuación, se muestra la Tabla 2 con las paqueterías y comandos empleados para el desarrollo y obtención de los intervalos de confianza y credibilidad.

Paquetes/Librerías	Comandos	Descripción	Ejemplo
<b>Frecuentista</b>			
DescTools	MultinomCI()	Intervalos de confianza simultáneos para proporciones multinomiales (método Sison-Glaz).	MultinomCI(observados, conf.level = 0.95, method = "sisonglaz")
EMT	GoodnessOfFit()	Prueba exacta de bondad de ajuste multinomial; útil para contrastar p esperadas (p. ej., 1/9).	GoodnessOfFit(observados, rep(1/9, 9), simulate.p.value = TRUE)
<b>Bayesiana</b>			
Bolstad2	MCmultinomdirichlet()	Muestreo de la posterior Dirichlet para proporciones multinomiales.	posterior <- MCmultinomdirichlet(obs, rep(1,9), mc = 100000)
coda	HPDinterval(), as.mcmc()	Cálculo de intervalos creíbles HPD a partir de muestras MCMC.	HPDinterval(as.mcmc(posterior), prob = 0.95)
MCMCpack	rdirichlet()	Muestreo directo de Dirichlet (alternativa a MCmultinomdirichlet).	draws <- rdirichlet(100000, rep(1,9) + obs)

**Tabla 2.** Paqueterías en software R Project versión 4.4.2.

## 7. RESULTADOS

Es importante recordar la interpretación de los intervalos y con base en ello revisamos las tablas de resultados.

- Estadística frecuentista,

Si  $(a, b)$  es un intervalo de confianza para  $\theta$  con probabilidad o coeficiente de confianza  $(1 - \alpha)$  significa que si repetimos el procedimiento  $r$  veces entonces  $100(1 - \alpha)\%$  es la fracción de  $r$  intervalos que incluirán el verdadero valor al parámetro.

- Estadística bayesiana

Un intervalo de credibilidad de  $(1 - \alpha)$  para  $\theta$  es un intervalo tal que la probabilidad de que contenga a  $\theta$  es igual a  $(1 - \alpha)$ .

La Tabla 3 muestra los resultados del distrito Pánuco, donde el primer intervalo de confianza

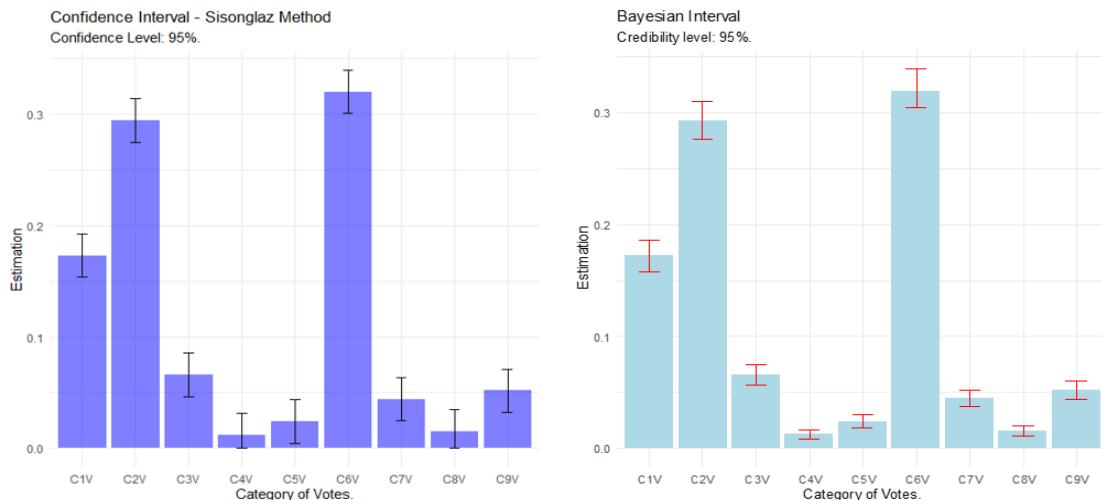
(0.15, **0.17**, 0.19) indica que, si repetimos el proceso de votación y para cada vez se calcula el intervalo de confianza, el 95% de estos contendrán la verdadera proporción de C1V (Boleta depositada en la urna sin marca alguna); mientras

que el intervalo de credibilidad indica que con una probabilidad del 95% la proporción de voto nulo de la categoría C1V se localiza en el intervalo (0.15, **0.17**, 0.18).

Votos nulos	Estimación	Intervalo confianza		Intervalo de credibilidad	
		Valor Inferior	Valor Superior	Valor Inferior	Valor Superior
C1V	0.17	0.15	0.19	0.15	0.18
C2V	0.29	0.27	0.31	0.27	0.30
C3V	0.06	0.04	0.08	0.05	0.07
C4V	0.01	0.00	0.03	0.00	0.01
C5V	0.02	0.00	0.04	0.01	0.03
<b>C6V</b>	<b>0.31</b>	<b>0.30</b>	<b>0.33</b>	<b>0.30</b>	<b>0.33</b>
C7V	0.04	0.02	0.06	0.03	0.05
C8V	0.01	0.00	0.03	0.01	0.02
C9V	0.05	0.03	0.07	0.04	0.06

**Tabla 3.** Intervalos de confianza y bayesiano para la multinomial, distrito Pánuco.

En este distrito las formas de voto nulo (C1V, C2V y C6V) fueron las proporciones más altas. En este caso, los intervalos de confianza presentan mayor amplitud que los intervalos de credibilidad, lo que puede generar incertidumbre en las proporciones verdaderas de las categorías de voto nulo; es decir, la estimación por intervalos bayesianos reportan mayor precisión, sin embargo, las estimaciones puntuales de las categorías C4V (Expresiones que denotan rechazo) y C8V (Marcas y/o expresiones en el recuadro de candidato no registrado que carece de elementos para otorgar el voto) caen en los límites bayesianos superior e inferior, respectivamente y solo se presenta coincidencia de los intervalos en la categoría C6V(Marcas en 2 o más recuadros de candidatos y/o partidos no coaligados). Lo anterior se muestra en la Figura 1.



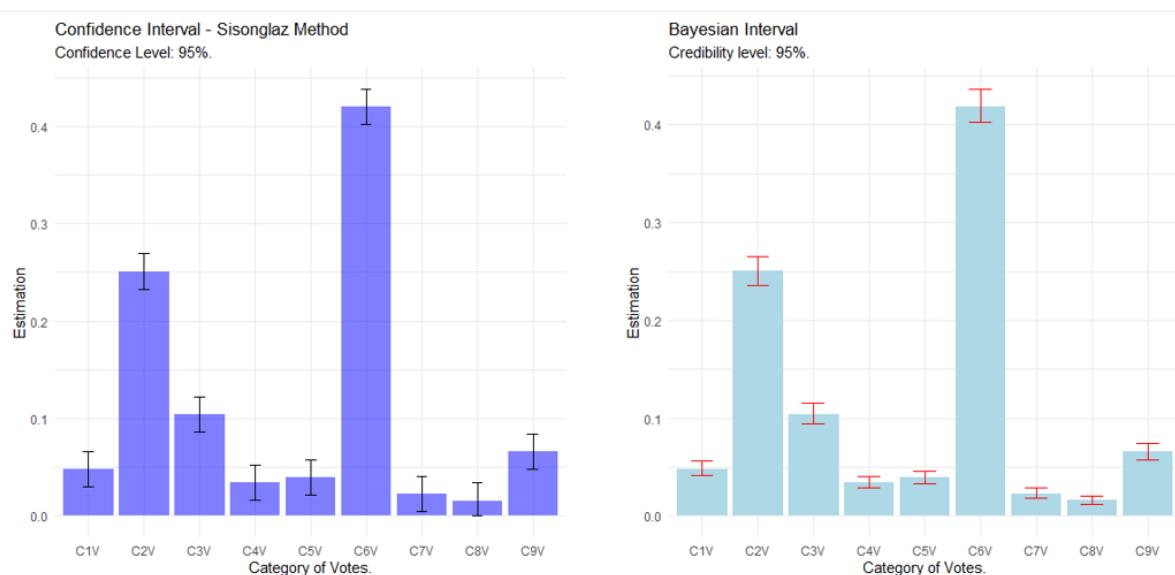
**Figura 1.** Representación los intervalos de ambos enfoques, primer distrito.

Con el  $100(1 - \alpha)\%$  de las veces, los intervalos de confianza contienen el valor de la proporción verdadera de los votos nulos. Si observamos los resultados de la Tabla 4, estos corresponden al distrito número 30 que es Coatzacoalcos, donde los intervalos de confianza y de credibilidad para las categorías C2V (Marcas en toda la boleta que denotan cancelación o anulación) y C6V (Marcas en 2 o más recuadros de candidatos y/o partidos no coaligados) de voto nulo reportan coincidencias, pero para el resto de las categorías los intervalos de confianza por ser más amplios contienen a los intervalos de credibilidad. En este distrito las formas de voto nulo que más se presentaron corresponden a C2V y C6V.

Votos nulos	Estimación	Intervalo confianza		Intervalo de credibilidad	
		Valor Inferior	Valor Superior	Valor Inferior	Valor Superior
C1V	0.04	0.02	0.06	0.04	0.05
<b>C2V</b>	<b>0.25</b>	<b>0.23</b>	<b>0.26</b>	<b>0.23</b>	<b>0.26</b>
C3V	0.10	0.08	0.12	0.09	0.11
C4V	0.03	0.01	0.05	0.02	0.04
C5V	0.03	0.02	0.05	0.03	0.04
<b>C6V</b>	<b>0.41</b>	<b>0.40</b>	<b>0.43</b>	<b>0.40</b>	<b>0.43</b>
C7V	0.02	0.00	0.04	0.01	0.02
C8V	0.01	0.00	0.03	0.01	0.02
C9V	0.06	0.04	0.08	0.05	0.07

**Tabla 4.** Intervalos de confianza y bayesiano para la multinomial, Coatzacoalcos distrito 30.

El nivel de credibilidad usado es del 95%, el cual indica que las proporciones verdaderas de cada una de las categorías de voto nulo está contenida en su correspondiente intervalo. Es importante mencionar que el estimador puntual de las categorías C1V (Boleta depositada en la urna sin marca alguna), C5V(Expresiones que no representan ningún sentido de elección) y C8V(Marcas y/o expresiones en el recuadro de candidato no registrado que carece de elementos para otorgar el voto) coinciden con el límite inferior, mientras que el de C7V(Marca/s en recuadro de un partido político o coalición que además contiene expresiones que generan contradicción o incertidumbre sobre la preferencia marcada) es igual al límite superior. Lo anterior se observa en la Figura 2.



**Figura 2.** Representación de los intervalos por ambos enfoques, distrito 30

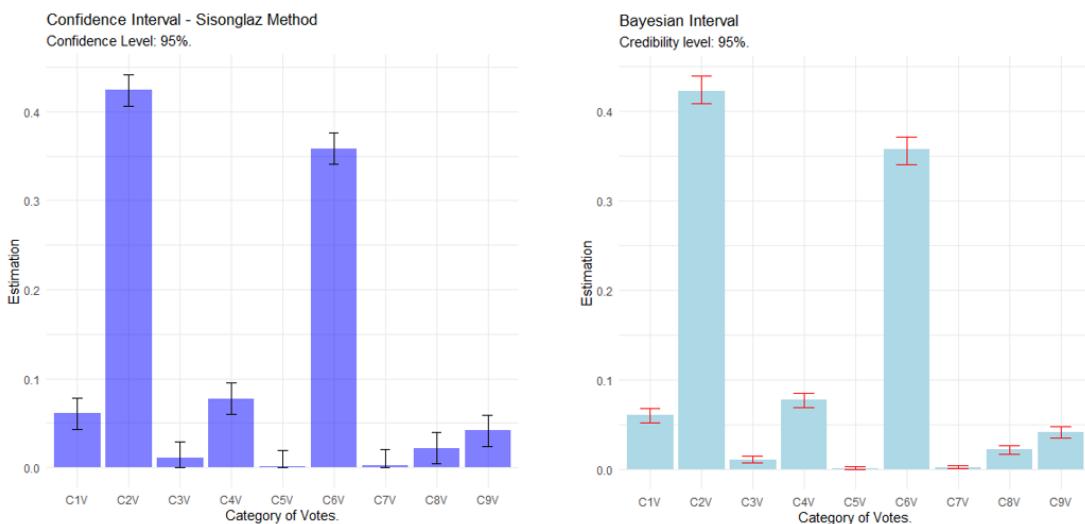
Al igual que en los casos anteriores, en la Tabla 5, los intervalos de confianza son más amplios que los intervalos bayesianos, y las estimaciones puntuales de las categorías C5V y C7V son muy pequeñas e iguales al límite inferior de los intervalos de ambos enfoques. En este caso, para la categoría C6V (Marcas en 2 o más recuadros de candidatos y/o partidos no coaligados) los intervalos de ambos métodos son iguales. Nótese que en el distrito de Boca del Rio las proporciones de voto nulo de las categorías C2V y C6V son más altas con respecto a los distritos anteriores.

Votos nulos	Estimación	Intervalo confianza		Intervalo de credibilidad	
		Valor Inferior	Valor Superior	Valor Inferior	Valor Superior
C1V	0.06	0.04	0.07	0.05	0.06

C2V	0.42	0.40	0.44	0.40	0.43
C3V	0.01	0.00	0.02	0.00	0.01
C4V	0.07	0.06	0.09	0.06	0.08
C5V	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
<b>C6V</b>	<b>0.35</b>	<b>0.34</b>	<b>0.37</b>	<b>0.34</b>	<b>0.37</b>
C7V	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
C8V	0.02	0.00	0.03	0.01	0.02
C9V	0.04	0.02	0.05	0.03	0.04

**Tabla 5.** Intervalos de confianza y bayesiano para la multinomial, distrito 16 Boca del Río.

En el bayesiano se tiene una menor amplitud lo cual indica una dispersión menor en la distribución a posteriori, afirmando una estimación de proporción más precisa en cada una de las clasificaciones de votos nulos. Se resalta para C6V, que para ambos enfoques se obtuvieron los mismos resultados indicando que la estimación puntual es más certera. Para una mayor comprensión, véase la Figura 3.



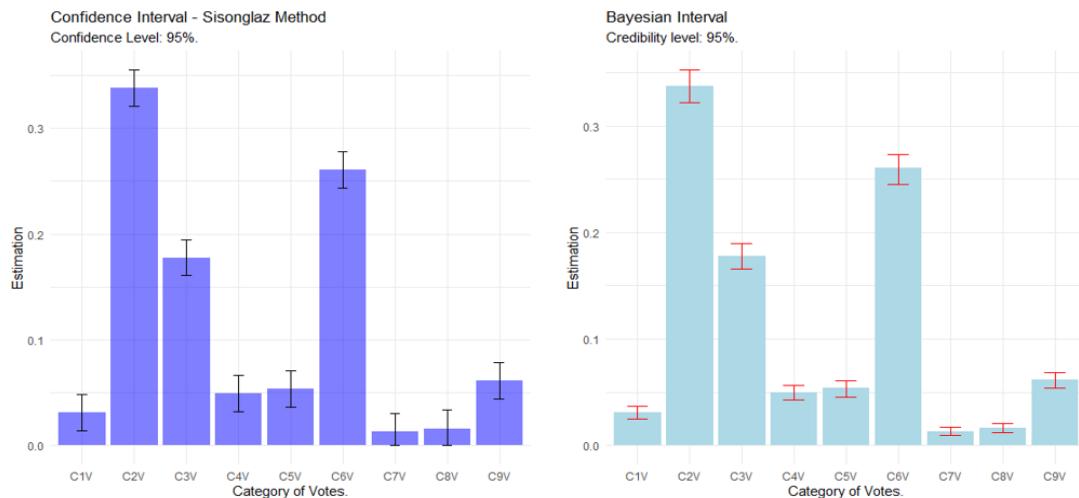
**Figura 3.** Representación visualmente los intervalos por ambos enfoques aplicación tres.

Para el distrito 14, que es Veracruz, las formas de voto nulo con mayor proporción fueron C2V (Marcas en toda la boleta que denotan cancelación o anulación), C3V (Múltiples marcas que no denotan preferencia alguna por las opciones en la boleta) y C6V (Marcas en 2 o más recuadros de candidatos y/o partidos no coaligados); además, los intervalos que son iguales para ambos métodos corresponden a las categorías C2V y C6V; por lo tanto, sus estimaciones puntuales son más precisas. En la Tabla 6, vemos que los intervalos de credibilidad siguen mostrando menor amplitud que los intervalos de confianza.

Votos nulos	Estimación	Intervalo confianza		Intervalo de credibilidad	
		Valor Inferior	Valor Superior	Valor Inferior	Valor Superior
C1V	0.03	0.01	0.04	0.02	0.03
<b>C2V</b>	<b>0.33</b>	<b>0.32</b>	<b>0.35</b>	<b>0.32</b>	<b>0.35</b>
C3V	0.17	0.16	0.19	0.16	0.18
C4V	0.04	0.03	0.06	0.04	0.05
C5V	0.05	0.03	0.07	0.04	0.06
<b>C6V</b>	<b>0.26</b>	<b>0.24</b>	<b>0.27</b>	<b>0.24</b>	<b>0.27</b>
C7V	0.01	0.00	0.03	0.00	0.01
C8V	0.01	0.00	0.03	0.01	0.02
C9V	0.06	0.04	0.07	0.05	0.06

**Tabla 6.** Intervalos de confianza y bayesiano para la multinomial, Veracruz.

Como se mencionó antes, si un intervalo está contenido dentro de otro, entonces se espera que la estimación puntual se localice en el intervalo interno, y no fuera de éste y dentro del más amplio, ya que esto genera incertidumbre. Notamos que algunas estimaciones puntuales se localizan en uno de los límites del intervalo de credibilidad, sin embargo, se ubican dentro del intervalo de confianza. (Véase la Figura 4).



**Figura 4.** Representación visualmente los intervalos por ambos enfoques aplicación cuatro.

Características	Intervalo de confianza	Intervalo de credibilidad
Dificultad de interpretación de resultados	Bajo	Medio
Mayor amplitud del IC	Alta	Baja
Menor amplitud del IC	Baja	Alta
Mejores resultados	Medio	Alto
Parámetro contenido	Alto	Alto
Similitud en resultados	Alto	Alto
Complejidad en el proceso usando R Project	Bajo	Bajo
Requerimiento de información previa	No	Si
Tiempo de ejecución	Medio	Medio

**Tabla 7.** Comparación cualitativa para ambos enfoques (Intervalos).

La Tabla 7, muestra una propuesta de evaluación cualitativa basado en la teoría y algunos resultados obtenidos de las aplicaciones. A continuación, se desglosa la interpretación de cada aspecto en ambos enfoques.

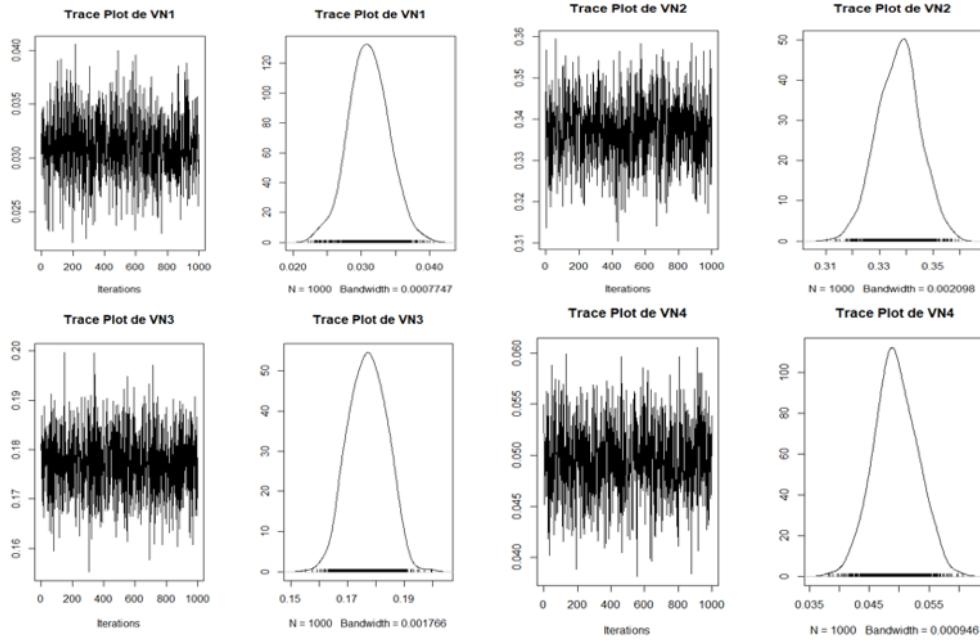
En el caso de *dificultad de interpretación de resultados de los métodos*, el enfoque clásico tiene una dificultad más baja para la interpretación de sus resultados, dando mayor claridad para comprender la información que proporciona al realizar el método. En cuanto al bayesiano tiene una dificultad media, la cual indica que para la interpretación de los resultados obtenidos es necesario que los usuarios tengan presente la información teórica matemática que respalda el proceso. De acuerdo con los *límites de ambos enfoques* el intervalo bayesiano presentó menor amplitud y está incluido en el intervalo frecuentista, indicando que contiene al parámetro estimado con una probabilidad del 95%.

En la representación de mejores resultados, en general el intervalo de credibilidad más preciso que el reportado por el enfoque clásico, ya que estos son más amplios. Aunque hubo unas categorías donde los valores de los intervalos

resultaron similares, permiten verificar que ambos enfoques contienen al parámetro, indicando que ambos son capaces de modelar aspectos complejos de los datos estudiados.

Al usar el software R Project, ambos enfoques presentan una baja complejidad en el proceso de los datos y obtención de intervalos. Sin embargo, para el caso bayesiano se requiere información previa para realizar las estimaciones. El tiempo de ejecución de los métodos fueron moderados, y viables para su desarrollo. Todo lo anterior refuerza la robustez de los resultados, especialmente en el método bayesiano, donde se observa un rango próximo al parámetro.

### Representación gráfica Markov Chain Monte Carlo (MCMC)



**Figura 5.** Trace plot para las cuatro primeras formas de voto nulo.

Se observa en la Figura 5, el trace plot de las cuatro categorías de los votos nulos (para ejemplificar el proceso bayesiano). Visualmente se verifica que se tiene buena convergencia y distribución estacionaria en las diferentes categorías, lo cual indica que las muestras se estabilizaron alrededor de un punto; es decir, la cadena realizó una exploración en todo el espacio de parámetros y encontró una solución óptima.

## 8. CONCLUSIONES

En esta investigación comparativa sobre la estimación por intervalos de confianza y bayesiano para la proporción en la distribución multinomial, se concluye que el método bayesiano exhibe rangos más cercanos al parámetro, mientras que el intervalo de confianza es más amplio como lo especifican en [17]. Esta diferencia es un elemento importante en la inferencia de ambos enfoques, ya que proporciona una medida de la incertidumbre asociada a la estimación puntual del parámetro.

Los resultados del intervalo bayesiano, al reportar mayor precisión, sugieren que este enfoque ofrece estimaciones más cercanas al parámetro real del fenómeno estudiado. Además, se consideraron otras características como la información a priori, la correspondiente a la función de verosimilitud, así como la interpretación de los enfoques, especialmente la del bayesiano.

Los resultados obtenidos por ambos enfoques tienen importantes implicaciones en la toma de decisiones y la interpretación de resultados en el contexto de la distribución multinomial, coincidiendo con [15]. La importancia de este estudio radica, no solo en la estimación de intervalos por ambos enfoques, sino también en el papel que desempeñan en la inferencia estadística, ya que proporcionan métodos valiosos para la toma de decisiones en diversas áreas de estudio, como en esta aplicación en la política.

Es importante destacar que el uso del software R Project para ambos enfoques fue accesible. La programación en este software estadístico facilitó la aplicación de técnicas avanzadas, como la realización de distribuciones conjugadas y el proceso de iteración por método Monte Carlo, aspectos importantes para la aproximación de la distribución, tal como lo menciona [17]. La implementación de herramientas inferenciales en ambos enfoques proporciona a las diversas áreas herramientas poderosas para interpretar y comunicar resultados.

RECEIVED: SEPTEMBER 2024.

REVISED: OCTOBER 2025.

## REFERENCIAS

- [1] AL-LABADI, L., CIUR, P., DIMOVIC, M., and LIM, K. (2023). Assessing Multinomial Distributions with a Bayesian Approach. *Mathematics*, 11, 3007. <https://doi.org/10.3390/math11133007>.
- [2] ÁLVAREZ, D. ARMERO, C. y FORTE A. (2017). What Does Objective Mean in a Dirichletmultinomial process. *International statistical review*, Valencia, Spain.
- [3] ALVARADO S. (2014). Aportes metodológicos en la estimación de tamaños de muestra en estudios poblacionales de prevalencia. Tesis Doctoral. **Universidad Autónoma de Barcelona**, Facultad de Medicina.
- [4] BOIS, F. (2013). Bayesian Inference. *Methods in molecular biology* (Clifton, N.J.), 930. 597-636. 10.1007/978-1-62703-059-5\_25.
- [5] CEPEDA, E., AGUILAR, W., CERVANTES, V., CORRALES, M., DÍAZ., y RODRÍGUEZ, D. (2008). Intervalos de confianza de credibilidad para una proporción. *Revista Colombiana de Estadística*, 31, 211-228.
- [6] CURRAN, J. (2005). An introduction to Bayesian credible intervals for sampling error in DNA profiles. *Law, Probability and Risk*, 4, 115-126.
- [7] FORSTER, J. MCDONALD, J. and SMITH, P. (1999). Markov chain Monte Carlo exact inference for binomial and multinomial logistic regression models. *Statistics and Computing*, 13, 169-177.
- [8] GARG, R., and GOYAL, R. (2019, February 5). Inferential Statistics As a Measure of Judging the Short-Term Solvency: An Empirical Study of Three Steel Companies in India. *International Journal of Advanced Studies of Scientific Research*, 4. Retrieved from <https://ssrn.com/abstract=3329388>
- [9] GELMAN, A., and SHALIZI, C. R. (2013). Philosophy and the practice of Bayesian statistics. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 66, 8-38.
- [10] GÓMEZ, G. y DELICADO, P. (2006). Curso de Inferencia y Decisión. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. **Universidad Politécnica de Catalunya**, España.
- [11] GONZÁLEZ, D. (2010). Comparación de intervalos de confianza para la distribución multinomial. (Tesis). Magister en Estadística. **Universidad Nacional de Colombia**, Facultad de Ciencias.
- [12] KAMPER, S. J. (2019). Confidence Intervals: Linking Evidence to Practice. *Journal of Orthopaedic & Sports Physical Therapy*, 49, 763–764, <https://doi.org/10.2519/jospt.2019.0706>
- [13] LIN, J. (2016). On The Dirichlet Distribution. A report submitted to the Department of Mathematics and Statistics. (Tesis Maestría). **Queen's University Kingston**, Ontario, Canada
- [14] LÓPEZ-MARTÍN, M.M., MOLINA-PORTILLO, E., CONTRERAS, J. y RUZ, F. (2019). Análisis de los errores inferenciales en el ámbito científico. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina- Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Disponible en [www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html](http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html).
- [15] MARSHALL G., and JONKER L. (2011). An introduction to inferential statistics: A review and practical guide. *Radiography*, 17, e1-e6. <https://doi.org/10.1016/j.radi.2009.12.006>
- [16] SIMUNDIC, A. M. (2008). Confidence interval. *Biochimia Medica*, 18, 154-161. 10.11613/BM.2008.015.
- [17] SISON, C. y GLAZ, J. (1995). Simultaneous Confidence Intervals and Sample Size Determination for Multinomial Proportions, *Journal of the American Statistical Association*, 90, 366-369.
- [18] TORTORA, R. (1978). Note on Sample Size Estimation for Multinomial Populations. *American Journal of Statistics*, 32, 100-102.
- [19] THOMPSON, S. K. (1987). Sample Size for Estimating Multinomial Proportions. *The American Statistician*, 41, 42–46. <https://doi.org/10.2307/2684318>
- [20] WESTERN, B., and JACKMAN, S. (1994). Bayesian Inference for Comparative Research. *The American Political Science Review*, 88, 412–423. <https://doi.org/10.2307/2944713>