DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE PÉRDIDAS DESENCADENANTE DE LOS BONOS SOBRE CATÁSTROFES A TRAVÉS DE UN MODELO CONTINUO DETERMINISTA BASADO EN UNA TASA DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS MIXTA (CONSTANTE Y ASINTÓTICA). AJUSTE MEDIANTE ESTRATEGIAS EVOLUTIVAS

María José Pérez-Fructuoso*[1] y José M. Molina**
*Universidad a Distancia de Madrid (UDIMA), Economics and Business Administration Department
**Universidad Carlos III de Madrid, Computer Science Department

ABSTRACT
This paper develops a model for calculating the loss index trigger of catastrophe bonds. The total catastrophe amount is defined as the sum of the claims reported amount and the incurred but not yet reported claims amount. The central hypothesis of the model is a decrease in the latter amount, proportional to a linearly increasing function up to a certain point in time and constant thereafter, called the mixed loss reporting rate. The suitability of this model to represent actual claims reporting is analyzed by studying the mathematical properties of the incurred but not yet reported claims amount function. Finally, the validity of the proposed model is studied by estimating its fundamental parameters using machine learning techniques, and the goodness of fit is tested for a sample of five floods occurring in different Spanish regions prone to this type of catastrophes.

KEYWORDS: reported claims amount, incurred but not yet reported claims amount, mixed claims reporting rate, evolutionary strategies

MSC: 60G15, 62P05

RESUMEN
En este artículo se desarrolla un modelo para calcular el índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes. La cuantía total de la catástrofe se define como la suma de la cuantía declarada de siniestros y la cuantía de siniestros pendiente de declarar y se establece como hipótesis central del modelo, un decrecimiento de esta última cuantía, proporcional a una función creciente linealmente hasta un determinado momento y constante a partir del mismo, denominada tasa de declaración de siniestros mixta. Se analiza la idoneidad de esta modelación para representar la declaración real de siniestros, estudiando las propiedades matemáticas de la función cuantía de siniestros pendiente de declarar. Finalmente, se estudia la validez del modelo propuesto estimando sus parámetros fundamentales mediante técnicas de aprendizaje automático y se contrasta la bondad del ajuste realizado para una muestra de cinco inundaciones ocurridas en distintas regiones españolas propensas a sufrir este tipo de catástrofes.

PALABRAS CLAVE: cuantía de siniestros declarada, cuantía de siniestros pendiente de declarar, tasa de declaración de siniestros mixta, estrategias evolutivas.

1. INTRODUCCIÓN

Los primeros instrumentos financieros destinados a la cobertura de eventos catastróficos fueron los contratos de futuros y opciones CAT, negociados en el mercado de Chicago (Chicago Board of Trade) y cuyo subyacente era un índice de pérdidas catastróficas [24]. Sin embargo, la emisión de Bonos sobre Catástrofes (o Cat bonds) ha sido la principal forma de titulización utilizada por el mercado asegurador para transferir la exposición a riesgos "no asegurables" o a los denominados "nuevos riesgos", como el derivado de la intensificación de las catástrofes naturales [30]. Esta operación de titulización facilita que el patrocinador del bono (habitualmente, un reasegurador) transfiera el riesgo catastrófico a los inversores de los mercados de capital (por ejemplo, un fondo de pensiones) a cambio de una elevada rentabilidad y además favorece la diversificación ya que el riesgo de pérdida de los bonos catastróficos no está correlacionado con el riesgo de pérdida en otros bonos y activos financieros tradicionales, lo que los convierte en títulos "beta cero".

[1] mariajose.perez@udima.es, molina@ia.uc3m.es

La estructura de estos bonos es similar a la de los bonos tradicionales, pero sus resultados, cupones y principal, están condicionados a la ocurrencia de un determinado suceso desencadenante cuyos parámetros quedan fijados en el momento de la emisión. El inversor compra el bono mediante el pago del principal y a cambio recibe pagos periódicos regulares, normalmente trimestrales, hasta el momento del vencimiento que oscila entre uno y cinco años (pero normalmente es de tres años). Entonces, si antes del vencimiento se produce la catástrofe cubierta en la emisión y esta supera el desencadenante definido en el contrato, el bono entra en incumplimiento y, dependiendo de las especificaciones del contrato, puede que no devuelva una parte o la totalidad del principal pagado por el inversor, que se destinará a cubrir las indemnizaciones del emisor.

El aspecto más complicado de la creación de un bono sobre catástrofes es definir qué desencadena la pérdida de capital. Básicamente existen cuatro tipos de desencadenantes: indemnización, índices de pérdidas del sector, paramétrico e índices de pérdidas modeladas. Y, de entre ellos, los índices de pérdidas del sector son los segundos en importancia, representando un 22,4% del total de emisiones durante el año 2023.

La modelación de estos índices de pérdidas para calcular el precio de los instrumentos de titulización del riesgo catastrófico en general y de los bonos sobre catástrofes en particular, se abordado en una gran variedad de artículos científicos.

En orden cronológico de publicación, empezamos haciendo referencia los trabajos de [11] y [16]. En ellos, se valoran futuros y opciones sobre riesgos catastróficos (futuros y opciones CAT) utilizando procesos geométricos de Wiener, para describir la declaración instantánea de los siniestros y procesos de Poisson, para introducir la ocurrencia de grandes catástrofes en el modelo. Sobre estos mismos derivados, [14], [1] y [2] aplican una mixtura de procesos de Poisson compuestos con frecuencia de siniestralidad aleatoria para modelar su índice de pérdidas subyacente.

[21] adaptan el modelo de valoración de opciones desarrollado por [11], al cálculo del precio de un bono sobre catástrofes cuyo desencadenante es un índice de pérdidas de la industria aseguradora. [10] definen una estructura temporal de tipos de interés y una estructura de probabilidades de ocurrencia de catástrofes para modelar el precio de un Cat bond en mercados incompletos. [4] calculan el precio de un bono catastrófico a partir de un proceso de Poisson compuesto doble y bajo las hipótesis de negociación continua y neutralidad frente al riesgo. [20] valoran los Cat Bonds a través de un movimiento Browniano geométrico teniendo en cuenta el riesgo de crédito, el azar moral y el riesgo de base. [22] realiza una valoración actuarial consistente de los activos derivados negociados en el Chicago Board of Trade aplicando la metodología desarrolla por [1]. [8] utilizan los resultados obtenidos por [22] para tarificar los bonos sobre catástrofes. [7] valora los bonos empleando procesos de Poisson no homogéneos con distribución de pérdidas truncada por la izquierda. [18] suponen un proceso de Poisson compuesto correlacionado con el proceso de difusión y tipos de interés estocásticos para modelar las pérdidas subyacentes que desencadenan las opciones de venta catastróficas. [5] representan la dinámica del índice de pérdidas de las opciones sobre riesgos catastróficos mediante un proceso de Poisson compuesto no homogéneo durante el periodo de ocurrencia de las catástrofes y utilizan un proceso de Levy exponencial no homogéneo para reestimar dicho índice desde la finalización de ese periodo y hasta el vencimiento. [13] obtienen el precio de indiferencia de un bono sobre catástrofes mediante una función de utilidad exponencial. [25] y [26] desarrolla un modelo para calcular el índice de pérdidas por catástrofes, definido como la diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de reclamaciones incurrida pero aún no declarada, variable aleatoria fundamental de la modelización, que se representa a través de un movimiento browniano geométrico con parámetro de tendencia constante. [34] propone un enfoque discreto de modelización de bonos sobre catástrofes y la ecuación en derivadas parciales resultante la resuelve mediante una aproximación numérica. [12] utilizan modelos binomiales para representar el momento en el que se producen las declaraciones y las pérdidas con el objetivo de realizar una tarificación neutral al riesgo de opciones catastróficas de estilo asiático. [6] propone un modelo en dos etapas para calcular el precio de swaps catastróficos y representa la ocurrencia de catástrofes a través de un proceso de Poisson doblemente estocástico con una intensidad de Ornstein-Uhlenbeck de regresión a la media. [23] valoran los bonos sobre catástrofes aplicando modelos de ETTI (tipos de interés spot libres de riesgo) bajo la hipótesis de que la ocurrencia de la catástrofe es independiente del comportamiento de los mercados financieros. [35] describen las pérdidas desencadenantes de los bonos catastróficos a través de procesos de Poisson compuestos no homogéneos con tipos de interés aleatorios. [19] calculan el precio del bono catastrófico a partir de una fórmula semicerrada modelizando las catástrofes mediante un proceso de difusión con saltos y el tipo de cambio, los tipos de interés nacionales y extranjeros, y el coste de cobertura del riesgo de tipo de cambio mediante un proceso estocástico tridimensional. [32] realizan una extensión del modelo de [10] para tarificar Cat bonds mediante un modelo discreto en el que las catástrofes se modelizan a través de la teoría de valor extremo, y los riesgos financieros a través de un modelo ARIMA clásico para determinar los tipos de interés y las tasas de inflación. El pago de los cupones del bono se representa mediante un proceso estocástico en función de un siguiendo el un modelo de [9]. En [27] y [28] se desarrollan dos modelos alternativos para incrementar la precisión del índice de pérdidas catastróficas planteado en [25] y [26]. En el primero se considera un decrecimiento de la cuantía de siniestros pendiente de declarar proporcional a una función exponencial, denominada tasa de declaración de siniestros asintótica, cuya dinámica se representa también a través de un movimiento browniano geométrico. En el segundo se modeliza la dinámica

lineal decreciente de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. De la comparación de los tres modelos llevada a cabo en [29] se concluye la conveniencia de desarrollar un modelo mixto entre el asintótico y el constante para ajustar el comportamiento de las declaraciones de siniestros a la realidad de los datos disponibles de forma más precisa. Por esta razón, en este artículo se presenta la primera fase de la elaboración de dicho modelo, en el que se considera una tasa de declaración de siniestros creciente linealmente hasta un determinado momento, a partir del cual dicha tasa pasa a ser constante hasta el final del periodo considerado. El modelo, en este caso, se desarrolla en ambiente cierto, como paso previo a la introducción de la aleatoriedad mediante procesos de Wiener, una vez comprobado que se cumplen las condiciones de continuidad y derivabilidad necesarias para la resolución de las ecuaciones diferenciales estocásticas que se derivan de la incorporación de dicha aleatoriedad.
Para llevar a cabo la estimación de los parámetros del modelo propuesto, se va a aplicar una técnica de aprendizaje automático del área de la Inteligencia Artificial. Dentro del campo del aprendizaje automático existen un conjunto de métodos basados en procesos naturales como la selección natural, el comportamiento social, la genética, los procesos neuronales, etc. En particular, el método utilizado en este artículo se encuadra en la denominada Computación Evolutiva [17]. Las técnicas de Computación Evolutiva utilizan el proceso de evolución de las especies propuesto por Darwin como fundamento para el desarrollo de algoritmos de búsqueda y optimización. Existen diversos algoritmos según el problema que debe ser resuelto. En este caso, los valores que deberán ajustarse son números reales por lo que se aplicarán las Estrategias Evolutivas [31] que trabajan directamente con números reales. Este tipo de estrategias permiten realizar la búsqueda sin incorporar conocimiento del problema, es decir, el algoritmo de búsqueda no necesita conocer como están definidos los modelos, tan sólo necesita conocer los resultados de los mismos (la función de error que se desea minimizar). De esta manera la estrategia evalúa las posibles soluciones (valores concretos para los parámetros del modelo), selecciona aquellas que son mejores (han obtenido un menor valor de error sobre la serie de datos de la catástrofe) y a partir de esta selección genera nuevas posibles soluciones (aplicando operadores propios de la estrategia evolutiva) hasta encontrar la solución que minimiza la función objetivo.
La estructura del artículo es a siguiente. Tras esta introducción, en la Sección 2 se realiza una definición general del índice de pérdidas cuyo comportamiento se quiere representar. Seguidamente, la Sección 3 presenta las soluciones de las variables cuantía declarada de siniestros y cuantía de siniestros pendientes de declarar de forma general y suponiendo que la tasa de declaración de siniestros se define de forma mixta. En la Sección 4 se verifica que el modelo representa adecuadamente la declaración de los siniestros mediante el análisis de las propiedades deseables de la función que caracteriza a la variable cuantía de los siniestros pendiente de declaración. La Sección 5 se dedica al cálculo del índice de pérdidas por catástrofes, a partir de los resultados obtenidos en la Sección 3 anterior. En la Sección 6 se realiza una validación del modelo propuesto a través de la estimación de sus parámetros mediante un proceso de optimización basado en Estrategias Evolutivas y un contraste de Kolmogorov-Smirnov para muestras independientes. Finalmente, la Sección 7 presenta las principales conclusiones alcanzadas en el trabajo.

2. DEFINICIÓN GENERAL DE UN ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES

Un índice de pérdidas por catástrofes se define como el cociente entre el total de pérdidas asociadas a las catástrofes ocurridas durante un determinado periodo de tiempo, $[0, T]$, denominado periodo de riesgo, y un valor constante, p, cuyo valor concreto depende del tipo de índice empleado.
El valor alcanzado por el índice de pérdidas al vencimiento, T', se calcula como,

$$LI(T') = \frac{L(T')}{p}$$

donde $L(T')$ es la cuantía total en T' de las reclamaciones del conjunto de eventos catastróficos registrados durante el periodo de riesgo.
El numerador de esta ratio de pérdidas, $L(T)$, es una variable aleatoria que depende de los siguientes factores de riesgo:

1) El número total de catástrofes, $N(T)$, que tienen lugar durante el periodo de riesgo, $[0, T]$, considerado.
2) Los momentos del tiempo, τ_j, en los que se producen dichas catástrofes j, con $j = 1, \dots, N(T)$ y $\tau_j \in [0, T]$.
3) La cuantía total de cada catástrofe K_j con $j = 1, \dots, N(T)$.
4) El comportamiento del proceso de declaración de siniestros, $S_j(t)$, que indica la cuantía declarada de siniestros en el momento t asociada a la catástrofe j, con $j = 1, \dots, N(T)$ y $t \in [t_j, T']$ y con la condición de contorno $S_j(t) \le K_j$.

Entonces, el numerador del índice catastrófico al vencimiento se calcula como:

$$L(T') = \sum_{j=0}^{N(T)} S_j(T') \quad (1)$$

Para determinar el valor de [1] asumimos las siguientes hipótesis de modelización.

Como es bien sabido, según la teoría de la probabilidad, un proceso de Poisson es un proceso estocástico que cuenta el número de sucesos que se producen en un determinado periodo de tiempo. Entonces, suponemos que $N(T)$ es un proceso de Poisson de intensidad λ, donde λ es el número medio de catástrofes ocurridas durante el periodo $[0, T]$. Al modelar el número de catástrofes que se producen mediante un proceso de Poisson de parámetro λ, el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos catástrofes consecutivas, es posible representarlo a través de una distribución exponencial de parámetro λ, esto es:

$$\tau_j - \tau_{j-1} \sim Exp(\lambda)$$

Suponemos que las cuantías totales de cada catástrofe K_j son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de forma que si $S_j(t)$ es la cuantía total ya declarada de dicha catástrofe en el momento t, definimos $R_j(t)$ como la cuantía total de siniestros, ya incurrida pero aún no informada, asociados a la catástrofe j en el momento t, de forma que:

$$S_j(t) = K_j - R_j(t)$$

Por tanto, el numerador del índice por catástrofes se convierte en:

$$L(T') = \sum_{j=0}^{N(T)} \left(K_j - R_j(T')\right) \qquad (2)$$

En el epígrafe a continuación, se desarrolla el modelo que permite obtener una expresión de $R_j(t)$ a partir de la cual calcular la cuantía declarada de siniestros, y por tanto el numerador del índice de pérdidas catastróficas desencadenantes de los Cat Bonds. Para ello, consideraremos la ocurrencia de una única catástrofe genérica, K, ocurrida en el momento τ del periodo de riesgo y, supondremos, que todas las catástrofes siguen el mismo proceso de reclamación, $S(t)$, y por tanto $R(t)$.

3. ELABORACIÓN DE UN MODELO MIXTO DETERMINISTA DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS

Como hipótesis de partida para llevar a cabo la modelización, y basándonos en la evidencia empírica, suponemos que, al principio, inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe, se declara una gran cantidad de siniestros, es decir, la intensidad de declaración es elevada, y a medida que pasa el tiempo el ritmo de las declaraciones asociadas a dicha catástrofe disminuye hasta anularse cuando ya no queda ningún siniestro por declarar. Entonces, representamos esta evolución de la siniestralidad instantánea mediante la siguiente ecuación diferencial cierta,

$$dS(t) = \alpha(t-\tau) \cdot R(t)dt \qquad (3)$$

que describe un crecimiento de la cuantía de siniestros declarada, $S(t)$, proporcional a la variable cuantía de siniestros pendiente de declarar, $R(t)$, y donde la razón de proporcionalidad, $\alpha(t-\tau)$, es una función real de variable real.

Diferenciando la ecuación [4] resulta:

$$dS(t) = -dR(t) \qquad (4)$$

Y substituyendo [4] en la ecuación [3], obtenemos la nueva ecuación diferencial que describe la evolución de la variable $R(t)$:

$$dR(t) = -\alpha(t-\tau) \cdot R(t)dt \qquad (5)$$

La ecuación diferencial [5] indica que la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t, $R(t)$, evoluciona de forma decreciente en el tiempo a razón de la tasa $\alpha(t-\tau)$, que denominamos *tasa de declaración de siniestros* y cuya determinación se realiza a partir del análisis de datos empíricos.

De la resolución de la ecuación diferencial ordinaria (5), obtenemos,

$$\frac{dR(t)}{R(t)} = -\alpha(t-\tau)dt \Rightarrow$$

$$\int_\tau^t \frac{dR(t)}{R(t)} = \int_\tau^t -\alpha(t-\tau)dt \Rightarrow$$

$$\ln R(t)]_\tau^t = \int_\tau^t -\alpha(t-\tau)dt \Rightarrow$$

$$\ln R(t) - \ln R(\tau) = \int_\tau^t -\alpha(t-\tau)dt \qquad (6)$$

donde $R(\tau)$ es la cuantía de siniestros pendiente de declarar en el momento en el que se produce la catástrofe, y coincide con el volumen total de la misma, esto es, $R(\tau) = K$ (condición de contorno inicial). Por tanto:

$$\ln R(t) - K = \int_\tau^t -\alpha(t-\tau)dt \qquad (7)$$

Realizando el siguiente cambio de variable en la integral de la ecuación [7],

$$t - \tau = s \Longrightarrow dt = ds$$
$$t = \tau \Longrightarrow s = 0$$
$$t = t \Longrightarrow s = t - \tau$$

y operando resulta:

$$\ln \frac{R(t)}{K} = \int_0^{t-\tau} -\alpha(s)ds \Rightarrow$$

$$R(t) = K \cdot \exp\left(-\int_0^{t-\tau} \alpha(s)ds\right) \tag{8}$$

La cuantía de siniestros declarada se calcula substituyendo en la ecuación [2] el valor de $R(t)$ obtenido en [8] y operando, como sigue:

$$S(t) = K \cdot \left[1 - \exp\left(-\int_0^{t-\tau} \alpha(s)ds\right)\right] \tag{9}$$

3.1. Expresiones para las variables $R(t)$ y $S(t)$ cuando la tasa de declaración de siniestros se define como una función mixta

El objetivo de esta modelización es aproximar de forma más precisa la tasa de declaración de siniestros y, por tanto, de las cuantías de siniestros declarada y pendiente de declaración, al comportamiento real de los datos. En este trabajo se van a sentar las bases para llevar a cabo la modelización del índice de pérdidas por catástrofes desencadenante de los Cat Bonds utilizando una tasa de declaración de siniestros mixta sin considerar aleatoriedad en el proceso de declaración de siniestros, como paso previo a la elaboración de un modelo estocástico que se desarrollará en un trabajo posterior.

Para ello, consideramos que la tasa de declaración de siniestros es creciente hasta un determinado momento del tiempo, que simbolizamos como t_m, y a partir de dicho momento esta tasa permanece constante al nivel α hasta que finaliza el proceso de reclamaciones.

El crecimiento que se produce en la tasa de declaración de siniestros es lineal con pendiente $\frac{\alpha}{t_m}$, esto es:

$$\alpha(s) = \begin{cases} \frac{\alpha}{t_m} \cdot s & 0 \leq s \leq t_m \\ \alpha & s > t_m \end{cases} \tag{10}$$

A partir de dicha definición, para obtener la cuantía de siniestros pendiente de declarar y, a partir de ella, la cuantía declarada de siniestros, podemos distinguir dos casos:

Caso 1: Si el momento de valoración, $s = t$, es anterior al momento en el que cambia el ritmo de declaración de los siniestros, $\tau \leq t \leq \tau + t_m$, entonces:

$$\int_0^{t-\tau} \alpha(s)ds = \int_0^{t-\tau} \left(\frac{\alpha}{t_m} \cdot s\right) ds = \frac{\alpha}{t_m} \cdot \frac{s^2}{2}\Big]_0^{t-\tau} = \frac{\alpha \cdot (t-\tau)^2}{2t_m}$$

En este caso, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en t resulta:

$$R(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{\alpha \cdot (t-\tau)^2}{2t_m}\right) = K \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\tau) \cdot \frac{(t-\tau)}{2t_m}} \tag{11}$$

Y la cuantía declarada de siniestros es:

$$S(t) = K - R(t) = K - K \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\tau) \cdot \frac{(t-\tau)}{2t_m}} = K \cdot \left[1 - e^{-\alpha \cdot (t-\tau) \cdot \frac{(t-\tau)}{2t_m}}\right] \tag{12}$$

Caso 2: Si el momento de valoración $s = t$, es posterior al momento en el que cambia el ritmo de declaración de los siniestros, $t > \tau + t_m$, entonces:

$$\int_0^{t-\tau} \alpha(s)ds = \int_0^{t_m} \left(\frac{\alpha}{t_m} \cdot s\right) ds + \int_{t_m}^{t-\tau} \alpha ds = \frac{\alpha}{t_m} \cdot \frac{s^2}{2}\Big]_0^{t_m} + \alpha \cdot s]_{t_m}^{t-\tau} = \alpha \cdot (t-\tau) - \frac{\alpha \cdot t_m}{2}$$

En este caso, la cuantía de siniestros pendiente de declarar en $s = t$ resulta:

$$R(t) = K \cdot \exp\left(-\left(\alpha \cdot (t-\tau) - \frac{\alpha \cdot t_m}{2}\right)\right) = K \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot e^{\frac{\alpha \cdot t_m}{2}} \tag{13}$$

Y la cuantía declarada de siniestros es:

$$S(t) = K - R(t) = K - K \cdot e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot e^{\frac{\alpha \cdot t_m}{2}} = K \cdot \left[1 - e^{-\alpha \cdot (t-\tau)} \cdot e^{\frac{\alpha \cdot t_m}{2}}\right] \tag{14}$$

4. ANÁLISIS DE LAS PROPIEDADES DESEABLES DE LA FUNCIÓN $R(t)$ PARA EL MODELO DE DECLARACIÓN DE SINIESTROS MIXTO

Para introducir la aleatoriedad en el modelo simple definido en el epígrafe anterior, se utilizará un proceso de Wiener que recoja las diferencias en cuanto a la intensidad de declaración de los siniestros asociadas a las características propias de cada catástrofe no explicitadas en el modelo. Este procedimiento requiere analizar previamente las propiedades de la función $R(t)$, en lo referente a continuidad y derivabilidad de la misma. Ello se debe a que la resolución de las ecuaciones diferenciales estocásticas resultantes de incorporar un movimiento browniano al proceso de declaración de siniestros, exige la aplicación del cálculo de Itô, para lo cual, es condición necesaria que la función sobre la que se aplica dicho proceso de cálculo sea derivable, y, por tanto, continua.

Además, es necesario que la función $R(t)$ mantenga las características de decrecimiento y convexidad establecidas en el modelo original propuesto por [25], para representar adecuadamente el proceso de declaración de siniestros que queremos modelizar.
Entonces, a partir de la función,

$$R(t)=\begin{cases} K\cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} & \tau\le t\le\tau+t_m \\ K\cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}} & t>\tau+t_m \end{cases}$$

que es una función definida a tramos, definimos una nueva función $\varphi(t)$,

$$\varphi(t)=\frac{R(t)}{K}=\begin{cases} e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} & \tau\le t\le\tau+t_m \\ e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}} & t>\tau+t_m \end{cases} \qquad (15)$$

de la que vamos a estudiar, en primer lugar, su continuidad y derivabilidad en el punto en el que cambia la definición de la función, $t=\tau+t_m$, que es el que puede ocasionar problemas de discontinuidad y, por tanto, de derivabilidad.

4.1. Estudio de la continuidad de $\varphi(t)$ en $t=\tau+t_m$

Para que la función $\varphi(t)$ sea continua en $t=\tau+t_m$ es condición necesaria y suficiente que el valor de los límites laterales de dicha función, a la derecha y a la izquierda del punto, coincida, y, además, coincida con el valor de la imagen de la función en dicho punto, esto es:

$$\lim_{t\to(\tau+t_m)^+}\varphi(t)=\lim_{t\to(\tau+t_m)^-}\varphi(t)=\varphi(\tau+t_m)$$

Calculamos en primer lugar los límites laterales:

- Límite lateral por la derecha:

$$\lim_{t\to(\tau+t_m)^+}\varphi(t)=\lim_{t\to(\tau+t_m)^+}\left(e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\right)=e^{-\alpha\cdot(\tau+t_m-\tau)}\cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}=e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

- Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{t\to(\tau+t_m)^-}\varphi(t)=\lim_{t\to(\tau+t_m)^-}\left(e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}\right)=e^{-\alpha\cdot\frac{(t+t_m-t)^2}{2t_m}}=e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

A continuación, calculamos la imagen de la función $\varphi(t)$ en $t=\tau+t_m$:

$$\varphi(\tau+t_m)=e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}=e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

Como,

$$\lim_{t\to(\tau+t_m)^+}\varphi(t)=\lim_{t\to(\tau+t_m)^-}\varphi(t)=\varphi(\tau+t_m)=e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

podemos afirmar que $\varphi(t)$ es una función continua en $t=\tau+t_m$ y, consecuentemente, $R(t)$ también es una función continua en $t=\tau+t_m$.

4.2. Estudio de la derivabilidad de $\varphi(t)$ en $t=\tau+t_m$

Para que la función $\varphi(t)$ sea derivable en $t=\tau+t_m$, el valor de las derivadas laterales, a la derecha y a la izquierda del punto, ha de coincidir, esto es:

$$\varphi'_{(\tau+t_m+0)}=\frac{d\varphi(t)}{dt^+}(t=\tau+t_m)=\frac{d\varphi(t)}{dt^-}(t=\tau+t_m)=\varphi'_{(\tau+t_m-0)}$$

Las derivadas laterales de $\varphi(t)$ en $t=\tau+t_m$ son las siguientes:

- Derivada lateral por la derecha:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt^+}(t=\tau+t_m)=e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}\cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\cdot(-\alpha)\Big]_{t=\tau+t_m}=-\alpha\cdot e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

- Derivada lateral por la izquierda:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt^-}(t=\tau+t_m)=e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}\Big]_{t=t_m}=-e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}\cdot\left(\frac{t\cdot\alpha}{t_m}\right)\Big]_{t=t_m}=-\alpha\cdot e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

Por tanto:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt^+}(t=\tau+t_m)=\frac{d\varphi(t)}{dt^-}(t=\tau+t_m)=-\alpha\cdot e^{-\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}$$

La función $\varphi(t)$ es derivable en $t=\tau+t_m$ y, consecuentemente, la función $R(t)$ también es derivable en dicho punto.
Como resumen del análisis matemático realizado hasta el momento para la función $\varphi(t)$ podemos decir que, tanto esta función como la función $R(t)$ son continuas y derivables para todo t. Esto nos permitirá desarrollar la modelización estocástica a través de un proceso de Wiener.

Brevemente, para definir el modelo aleatorio, como se ha comentado al principio de esta sección, se introducirá un proceso de Wiener (movimiento Browniano) en la ecuación [5] dando lugar a la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dR(t) = -\alpha(t-\tau)R(t)dt + \sigma R(t)dW(t) \tag{16}$$

donde $\alpha(t-\tau)$ representa la tendencia del proceso, σ es una constante que indica la volatilidad del proceso y $W(t)$ es un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe del tipo *i* ocurrida en el momento τ.

El proceso de Wiener puede definirse como sigue:

Definición 1. $W(t)$ es un proceso de Wiener si satisface:

(1) $\{W(t)\}$ es continuo y $W(0) = 0$.

(2) Para un *t* dado, $W(t) \sim N(0, t)$.

(3) Para *s* y *t* dados, $W(s+t) - W(s) \sim N(0, t)$.

Definición 2. Hacemos que $X(t)$ sea un proceso estocástico. $X(t)$ es llamado proceso Gaussiano si $X(t) \sim N(\mu(t), \lambda(t))$. Entonces $W(t)$ es un proceso Gaussiano.

Para resolver la ecuación [5] necesitamos aplicar el cálculo de Itô a partir de lo que se conoce como proceso de Itô:

Definición 3: Sea $Z(t)$ un proceso aleatorio gobernado por la siguiente ecuación:

$$Z(t) = Z(0) + \int_0^t a(s)ds + \int_0^t b(s)dW(s)$$

Entonces, $Z(t)$ es un proceso de Itô si:

1. $\int_0^t |a(s)|ds < \infty$ y $\int_0^t (b(s))^2 dW(s) < \infty$
2. $W(t)$ es un proceso de Wiener.
3. La integral $\int_0^t b(s)dW(s)$ puede expresarse como sigue: Para cada $n > 0$ tomamos la partición del intervalo $[0, t]$, $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t\}$, de forma que $t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$.
   Entonces, la integral se puede expresar como:
   $$\int_0^t b(s)dW(s) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sum_{\pi_n} b(t_{i-1})\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big)$$
4. La ecuación (a) se puede expresar de forma equivalente mediante la siguiente ecuación diferencial estocástica:
   $$dZ(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \tag{17}$$

Corolario 1. $\lim_{dt\to 0} \frac{(dW(t))^2}{dt} = 1$

Sea $Z(t)$ un proceso de Itô de la forma dada en la ecuación (17) y sea $f(x)$ una función dos veces diferenciable. Entonces, construimos un polinomio de Taylor de la función $f\big(Z(t)\big)$ y detenemos su desarrollo en $o(dt)$:

$$df\big(Z(t)\big) = f'\big(Z(t)\big)dZ(t) + \frac{f''(Z(t))}{2}\big(dZ(t)\big)^2 + \cdots$$

$$= f'\big(Z(t)\big)(a(t)dt + b(t)dW(t)) + \frac{f''(Z(t))}{2}(a(t)dt + b(t)dW(t))^2 + \cdots$$

$$= f'\big(Z(t)\big)(a(t)dt + b(t)dW(t)) + \frac{f''(Z(t))}{2}\Big(a^2(t)(dt)^2 + b^2(t)\big(dW(t)\big)^2 + a(t)b(t)dtdW(t)\Big) + \cdots$$

$$= f'\big(Z(t)\big)(a(t)dt + b(t)dW(t)) + \frac{f''(Z(t))}{2}b^2(t)\big(dW(t)\big)^2 + o(dt)$$

$$= \left(f'\big(Z(t)\big)a(t) + \frac{f''(Z(t))}{2}b^2(t)\right) + f'\big(Z(t)\big)b(t)dW(t) \tag{18}$$

El resultado obtenido en (c) con $f\big(Z(t)\big) = \ln Z(t)$ se aplica sobre el proceso de Itô de nuestro modelo para obtener la solución a la ecuación diferencial estocástica (16) de forma que $Z(t) = R(t)$, $a(t) = -\alpha(t-\tau)R(t)$ y $b(t) = \sigma R(t)$:

$$d(\ln R(t)) = \left(\frac{1}{R(t)}\big(-\alpha(t-\tau)R(t)\big) + \frac{-1}{2R(t)^2}\sigma^2 R(t)^2\right)dt + \frac{1}{R(t)}\sigma R(t)dW(t)$$

$$= -\left(\alpha(t-\tau) + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t) \tag{19}$$

Llegados a esta solución, la solución de esta integral estocástica es inmediata para la función *tasa de declaración de siniestros* definida de forma general y de forma mixta.

A continuación, analizamos la primera y segunda derivadas de la función lo que nos permitirá conocer el crecimiento/decrecimiento de la misma y su curvatura, para determinar si el comportamiento de la declaración de los siniestros se ajusta a la realidad que queremos modelizar.

4.2.1. Estudio de la primera derivada de $\varphi(t)$: Crecimiento / Decrecimiento de la función $\varphi(t)$

Como $\varphi(t)$ es una función definida a tramos, para estudiar su crecimiento/decrecimiento distinguimos dos casos:

- Si $\tau \leq t \leq \tau + t_m$, calculamos la primera derivada de la función $\varphi(t)$ y estudiamos su signo:

$$\varphi'(t) = e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} \cdot \left(-\frac{\alpha}{2t_m}\cdot 2(t-\tau)\right) = -\underbrace{e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}}_{>0} \cdot \underbrace{\left(\frac{2\alpha\cdot(t-\tau)}{2t_m}\right)}_{>0} < 0$$

En $\tau \le t \le \tau + t_m$ la función $\varphi(t) < 0$ y, por tanto, es decreciente.

- Si $t > \tau + t_m$, calculamos la primera derivada de la función $\varphi(t)$ y estudiamos su signo:

$$\varphi'(t) = e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} \cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}} \cdot (-\alpha) = -\alpha \cdot \underbrace{e^{-\alpha\cdot(t-\tau)}}_{>0} \cdot \underbrace{e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}}_{>0} < 0$$

En $t > \tau + t_m$ la función $\varphi(t) < 0$ y, por tanto, es decreciente.

En conclusión, $\varphi(t)$ es una función decreciente para cualquier valor de t y, consecuentemente, $R(t)$ también es una función decreciente para todo t.

4.2.2. Estudio de la segunda derivada de $\varphi(t)$: Curvatura de la función $\varphi(t)$

Para estudiar la curvatura de la función $\varphi(t)$, calculamos, en primer lugar, los posibles puntos de inflexión de dicha función.

Al estar $\varphi(t)$ definida a tramos, distinguimos dos casos:

- Si $\tau \le t \le \tau + t_m$, calculamos la segunda derivada de la función $\varphi(t)$ y la igualamos a cero:

$$\varphi''(t) = e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} \cdot \left(-\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)\cdot\left(-\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right) + \left(-\frac{\alpha}{t_m}\right)\cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}$$
$$= e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} \cdot \left[\left(\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)^2 - \frac{\alpha}{t_m}\right] = 0$$

Para que $\varphi''(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\left(\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)^2 - \frac{\alpha}{t_m}\right] = 0$. Entonces:

$$\left[\left(\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)^2 - \frac{\alpha}{t_m}\right] = 0 \Longrightarrow (t-\tau)^2 = \frac{\alpha\cdot {t_m}^2}{t_m\cdot\alpha^2} = \frac{t_m}{\alpha} \Longrightarrow (t-\tau) = +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$$

$(t-\tau) = +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$ que es un posible punto de inflexión. Para determinar si es un punto de inflexión, calculamos la tercera derivada de $\varphi(t)$ y obtenemos el valor de esta derivada en dicho punto:

$$\varphi'''\left((t-\tau) = +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}\right) =$$
$$= \left[e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} \cdot \left(-\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)\cdot\left[\left(\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)^2 - \frac{\alpha}{t_m}\right] + e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} \cdot\left(-\frac{2\alpha\cdot(t-\tau)^2}{t_m^2}\right)\right]_{(t-\tau)=+\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}} =$$
$$= \left[e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}} \cdot \left[-\left(\frac{\alpha\cdot(t-\tau)}{t_m}\right)^3 + \frac{3\alpha^2\cdot(t-\tau)}{t_m^2}\right]\right]_{(t-\tau)=+\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}} = e^{-\frac{1}{2}}\cdot\left[-\left(\sqrt{\frac{\alpha}{t_m}}\right)^3 + 3\sqrt{\frac{\alpha^3}{t_m^3}}\right]$$
$$= 2e^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha^3}{t_m^3}} \neq 0$$

Por tanto, $(t-\tau) = +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$ es un punto de inflexión de $\varphi(t)$ y también de $R(t)$.

Una vez calculados los puntos de inflexión de la función, estudiamos el signo de la segunda derivada a la derecha y a la izquierda de dicho punto para determinar la curvatura de $\varphi(t)$.

- Signo de la segunda derivada a la derecha de $(t-\tau) = +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$: en este caso tomamos el punto $(t-\tau) = +\sqrt{\frac{2t_m}{\alpha}} > (t-\tau) = +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$ y estudiamos el signo de la segunda derivada en ese punto:

$$\varphi''\left((t-\tau)=+\sqrt{\frac{2t_m}{\alpha}}\right)=e^{-\alpha\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{2t_m}{\alpha}}\right)^2}{2t_m}}\cdot\left[\left(\frac{\alpha\cdot\sqrt{\frac{2t_m}{\alpha}}}{t_m}\right)^2-\frac{\alpha}{t_m}\right]=e^{-1}\cdot\left(\frac{\alpha}{t_m}\right)>0$$

$\varphi(t)$ es convexa a la derecha del punto de inflexión y por tanto $R(t)$ también lo es.

- Signo de la segunda derivada a la izquierda de $t-\tau=+\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$: en este caso tomamos el punto $t-\tau=+\sqrt{\frac{t_m}{2\alpha}}<t-\tau=\ +\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$ y estudiamos el signo de la segunda derivada en ese punto:

$$\varphi''\left(t-\tau=+\sqrt{\frac{t_m}{2\alpha}}\right)=e^{-\alpha\cdot\frac{\left(\sqrt{\frac{t_m}{2\alpha}}\right)^2}{2t_m}}\cdot\left[\left(\frac{\alpha\cdot\sqrt{\frac{t_m}{2\alpha}}}{t_m}\right)^2-\frac{\alpha}{t_m}\right]=-e^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{\alpha}{2t_m}\right)<0$$

$\varphi(t)$ es cóncava a la izquierda del punto de inflexión y por tanto $R(t)$ también lo es.

- Si $t>\tau+t_m$ calculamos la segunda derivada de la función $\varphi(t)$ y la igualamos a cero:
  $\varphi''(t)=-\alpha\cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)+\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\cdot(-\alpha)=\alpha^2\cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)+\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}>0$
  Esta derivada es siempre mayor que cero, por tanto, no existen puntos de inflexión y $\varphi(t)$ es siempre convexa y consecuentemente $R(t)$ también lo es.

La función presenta un punto de inflexión en $t-\tau=+\sqrt{\frac{t_m}{\alpha}}$ de forma que si $\tau\leq t\leq\tau+t_m$ la función en dicho punto pasa de ser cóncava a ser convexa y para $t>\tau+t_m$ la función siempre es convexa.
Podemos decir, como conclusión de este análisis que, la función $R(t)$ resultante de esta modelización cumple las propiedades deseables de decrecimiento y curvatura y por tanto representa adecuadamente la realidad de la declaración de siniestros que queremos representar.

5. DETERMINACIÓN DEL ÍNDICE DE PÉRDIDAS POR CATÁSTROFES

Como se ha señalado en el epígrafe 2, el índice de pérdidas por catástrofes se define como,

$$LI(T')=\frac{L(T')}{p}$$

donde p es un valor constante y $L(T')$ es la cuantía acumulada de declaraciones de pérdidas hasta el momento del vencimiento T'y se calcula, a partir de la cuantía declarada de siniestros, como se indica en la ecuación [2].
Para el caso de los bonos sobre catástrofes, los índices utilizados como desencadenantes del pago de las indemnizaciones se basan en la cuantía acumulada de las pérdidas hasta el vencimiento asociada a una única catástrofe. Por tanto, definimos la variable de Bernoulli o variable indicador, δ, cuyo valor es 0 si no se produce la catástrofe cubierta en la emisión o 1 en otro caso y el índice de pérdidas se reescribe como:

$$LI(T')=\delta\frac{S(T')}{p}=\begin{cases}0 & \text{si } \delta=0\\ \frac{S(T')}{p}=\frac{K_j-R_j(T')}{p} & \text{si } \delta=1\end{cases} \quad (20)$$

Cuando la tasa de declaración de siniestros se define a través de un modelo mixto, para determinar la cuantía total de declaraciones de siniestros en T', es necesario distinguir dos posibles situaciones en función del momento en el que se produce el cambio de ritmo en las declaraciones, $t=\tau+t_m$. Así:

- Si $T'\leq\tau+t_m$:
  $$LI(T')=\delta\cdot\frac{K}{p}\cdot\left[1-e^{-\alpha\cdot(T'-\tau)\cdot\frac{(T'-\tau)}{2t_m}}\right] \quad (21)$$
- Si $T'>\tau+t_m$:
  $$LI(T')=\delta\cdot\frac{K}{p}\cdot\left[1-e^{-\alpha\cdot(T'-\tau)}\cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\right] \quad (22)$$

$LI(T')$ es el valor del índice de pérdidas al vencimiento cuya determinación se realiza en el momento inicial del proceso. Interesa ver ahora cómo se modifica su distribución de probabilidad cuando, con el paso del tiempo, llegamos al momento t e incorporamos la información disponible en ese momento acerca de los siniestros declarados en el intervalo $[0,t]$. Para ello, se define la variable aleatoria condicionada $LI^*(T')=LI(T')|\mathcal{F}_t$ que representa la cuantía total de las pérdidas asociadas a la catástrofe cubierta en la emisión del bono que incorpora, a través de la filtración $\mathcal{F}_t$, la información disponible sobre las declaraciones de siniestros realizadas hasta el momento $t\in[\tau,T']$.
La obtención de la variable aleatoria condicionada $LI^*(T')$, supone calcular la cuantía declarada de pérdidas en el momento t, $L(t)$, cuya expresión dependerá de que dicho momento t se sitúe antes o después del momento en el que cambia el ritmo de declaración $\tau+t_m$. Por tanto:

- Si $t \leq \tau + t_m$:
$$L(t) = \delta \cdot \frac{K}{p} \cdot \left[1 - e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}\right] \quad (23)$$
- Si $t > \tau + t_m$:
$$L(t) = \delta \cdot \frac{K}{p} \cdot \left[1 - e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} \cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\right] \quad (24)$$

Una vez obtenida la variable $L(t)$, la incorporamos a la variable $LI(T')$, y obtenemos las expresiones de la variable condicionada $LI^*(T')$, en función del momento en el que cambia el ritmo de declaración de siniestros:

- Si $t \leq \tau + t_m$:
$$LI^*(T') = \frac{\delta}{p} \cdot \left[L(t) + (K|\mathcal{F}_t) \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot(T'-t)\cdot\frac{(T'-t)}{2t_m}}\right) \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)\cdot\frac{(t-\tau)}{2t_m}}\right] \quad (25)$$
- Si $t > \tau + t_m$:
$$LI^*(T') = \frac{\delta}{p} \cdot \left[L(t) + (K|\mathcal{F}_t) \cdot \left(1 - e^{-\alpha\cdot(T'-t)} \cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\right) \cdot e^{-\alpha\cdot(t-\tau)} \cdot e^{\frac{\alpha\cdot t_m}{2}}\right] \quad (26)$$

Calcular el índice de pérdidas de esta forma permite utilizar la teoría general de valoración de opciones para tarificar el bono sobre catástrofes en cualquier momento de su periodo de negociación.

6. VALIDACIÓN DEL MODELO. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO MEDIANTE ESTRATEGIAS EVOLUTIVAS (EE) Y CONTRASTE DE BONDAD DE AJUSTE

El modelo propuesto representa el proceso de declaración de siniestros asociado a la ocurrencia de una catástrofe cubierta en la emisión del bono. En el mismo, la velocidad con la que se realiza dicha declaración se representa mediante una función, denominada tasa de declaración de siniestros, que se ha definido de forma mixta, es decir, creciente linealmente hasta un determinado momento y constante a partir de entonces y hasta el final del proceso de declaración. Dicha tasa de declaración depende de dos parámetros, $\alpha \; y \; t_m$, que determinan la forma en que se van a realizar las declaraciones y que deben ser calculados para cada uno de los conjuntos de datos disponibles.

En este trabajo, para estimar el valor de dichos parámetros vamos a formular un problema de optimización, definiendo una función objetivo que será minimizada utilizando técnicas de computación evolutiva denominadas Estrategias Evolutivas (EE).

Una EE se define como una 8-tupla [3],
$$EE = (I, \Phi, \Omega, \Psi, s, \iota, \mu, \lambda) \quad (27)$$
donde:

- $I = (\vec{x}, \vec{\sigma}, \vec{\alpha}) = \Re^n \times \Re_+^{n_\sigma} \times [-\pi, \pi]^{n_\alpha}$ es el espacio de individuos.
- $n_\sigma \in \{1, \ldots, n\}$ indica la dimensión del vector de desviaciones estándar de los parámetros a ajustar, n es el número de parámetros a ajustar
- $n_\alpha \in \left\{0, \frac{(2n-n_\sigma)(n_\sigma-1)}{2}\right\}$ es la dimensión del vector de ángulos de rotación, que en este caso es igual a cero, $n_\alpha = 0$, por la simplificación de la definición de un individuo.
- $\Phi: I \rightarrow \Re = f$ es la función de fitness o evaluación.
- $\Omega = \{m_{\{\tau,\tau',\beta\}}: I^\lambda \rightarrow I^\lambda\} \cup \{r_{\{rx,r\sigma,r\alpha\}}: I^\mu \rightarrow I^\lambda\}$ son los operadores genéticos mutación y recombinación.
- $\Psi(P) = s\left(P \cup m_{\{\tau,\tau',\beta\}}\left(r_{\{rx,r\sigma,r\alpha\}}(P)\right)\right)$ es el proceso para generar un nuevo conjunto de individuos.
- s es el operador selección.
- ι es el criterio de terminación.

Estas técnicas surgieron para resolver problemas de optimización complejos y ofrecen una serie de ventajas que pueden resumirse en: simplicidad conceptual, amplia aplicabilidad y potencialidad para usar el conocimiento e hibridarlas con otros métodos [15]. En general, las EE trabajan con una población de individuos pertenecientes al dominio de los números reales, que mediante los procesos de mutación y recombinación evolucionan para alcanzar el óptimo de la función objetivo. Cada individuo es un posible óptimo de la función objetivo y su representación consta de dos tipos de variables, las variables objetivo, que son los posibles valores que hacen que la función objetivo alcance el óptimo global, y las variables estrategia, que son los parámetros que indican de qué manera las variables objetivo son afectadas por la mutación.

De forma resumida, los pasos a seguir para aplicar una EE son los siguientes:

1. Se genera aleatoriamente una población inicial de individuos, P.
2. Se evalúan los individuos de esta población calculando el valor de adecuación de cada uno de ellos a su entorno.
3. Se verifica si se cumple un determinado criterio de convergencia previamente fijado.
4. Si se alcanza dicho criterio de convergencia, la estrategia termina.
5. Si no se alcanza el criterio de convergencia, de la población generada se seleccionan una serie de individuos, μ, como padres, que pueden sufrir o no recombinación, dando lugar a los hijos, λ, que sufren mutación tanto en la parte de parámetros objetivo como en la de parámetros estrategia.

6. Del conjunto formado por padres e hijos, y en función del tipo de EE considerada, se seleccionan los individuos que van a sobrevivir y que dan lugar a la nueva población.
7. La nueva población se vuelve a evaluar y el proceso se repite hasta que se alcanza el criterio de convergencia establecido.

El proceso de recombinación se realiza a través del operador de sobrecruzamiento que puede ser discreto o intermedio. El sobrecruzamiento discreto supone que el individuo hijo sea un vector cuya composición depende de los valores aleatorios generados por una distribución uniforme de forma que, si el número generado es mayor que un umbral, la componente del vector será la de uno de los padres y, si es menor que el umbral será la del otro padre. En caso de que el sobrecruzamiento sea intermedio, las componentes del vector hijo serán la media de los valores de las componentes de los vectores padres.

El operador mutación guía la búsqueda en las EE de manera que cada parámetro objetivo será mutado en la magnitud que indica su correspondiente parámetro estrategia y ambos parámetros mutan. La mutación de los parámetros objetivo para cada individuo se realiza aplicando la siguiente fórmula,

$$\vec{x}' = \vec{x} + \sigma_i' \cdot \vec{N}(\vec{0}, 1) \quad (28)$$

siendo $\vec{x}'$ el vector de parámetros objetivo mutado, $\vec{x}$ el vector de parámetros objetivo sin mutar y $\sigma_i' \cdot \vec{N}(\vec{0}, 1)$ un vector de distribuciones normales con media 0 y desviación estándar σ_i'.

En cuanto a los parámetros de estrategia, mutan de forma proporcional a un factor generado aleatoriamente según una distribución gaussiana que depende de la varianza definida a priori como un valor constante:

$$\sigma_i' = \sigma_i \cdot exp(\tau' \cdot N(0,1) + \tau \cdot N(0,1)) \quad (29)$$

Las EE tiene varias formulaciones, pero la forma más común es (μ, λ)-EE, donde λ >μ ≥1 y (μ,λ) significa que μ-padres generan λ-hijos mediante recombinación y mutación en cada generación. Los mejores μ hijos se seleccionan de forma determinista entre los λ hijos y sustituyen a los padres actuales. No se utiliza elitismo ni selección estocástica. Una extensión del esquema de selección es el uso del elitismo; esta formulación se llama (μ+λ)-EE de forma que, en cada generación, los mejores μ-individuos del conjunto formado por los μ-padres y λ-hijos sustituyen a los μ-padres actuales. Así, las mejores soluciones se mantienen a lo largo de las generaciones. El coste computacional de la formulación (μ, λ)-ES y (μ+λ)-ES es el mismo.

6.1. Codificación del modelo matemático. Ajuste de la tasa de declaración de siniestros

Como ya se ha comentado anteriormente, en el modelo propuesto para representar el proceso de siniestralidad, la tasa de siniestralidad se define mediante dos parámetros (α, t_m) cuyo valor se va a obtener minimizando una función objetivo mediante técnicas de computación evolutiva. El procedimiento de optimización global que se va a aplicar debe ajustar los dos parámetros de forma simultánea minimizando la suma al cuadrado de las diferencias entre los valores estimados por el modelo y los valores reales disponibles.

En general, el objetivo principal del problema de optimización global se resume en la siguiente definición [33]:

$f: M \subseteq \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, M \neq \emptyset,$ para $x \in M$ el valor $f^* \coloneqq f(x^*) > \infty$

se denomina el mínimo global, si y solo si $\forall x \in M: f(x^*) \leq f(x)$

donde $x*$ es el mínimo global, f la función objetivo, y el conjunto M es la región factible. En este trabajo, el problema de optimización global tiene una única restricción: la tasa de declaración de siniestros debe ser positiva. Esta restricción se incluye en la codificación y todos los individuos se procesan para convertirse en factibles. De esta forma, a pesar de la restricción, el espacio de soluciones no contiene regiones no factibles.

El tipo de recombinación utilizado en este trabajo es la recombinación discreta y (μ+λ)-EE la estrategia seguida para seleccionar el individuo a la siguiente generación. El resto de los parámetros utilizados para la aplicación de la EE se resumen en la Tabla 1. Además, la EE se ha ejecutado con diferentes valores de inicialización del generador de números aleatorios para asegurar que el valor obtenido como solución no se puede mejorar.

Parámetro	**Valor**
Desviaciones Estándar Iniciales	Generados aleatoriamente entre [0,0;5,0]
Número de ángulos de rotación	0
Tamaño de la población de padres	20
Tamaño de la población de hijos	80
Criterio de terminación	Número de generaciones = 500

Tabla 1: Ajuste de los parámetros exógenos de la EE

Los datos reales para ajustar el modelo están relacionados con inundaciones ocurridas en varias regiones españolas: Alcira (01/10/1991), Barcelona 1 (14/09/1999), Barcelona 2 (20/10/2000), Zaragoza (20/10/2000) y Valencia (20/10/2000). Los datos son series temporales de siniestros comunicados semanalmente.

Semana	**Alcira**	**Barcelona 1**	**Barcelona 2**	**Zaragoza**	**Valencia**
0	100	100	100	100	100
1	84,94	90,68	85,95	60,11	97,54
2	53,65	68,38	61,73	56,91	80,18
3	34,96	50,68	34,98	38,3	60,15

4	24,05	41,42	24,07	29,79	43,16
5	18,86	31,58	14,05	23,4	31,96
6	13,36	25,43	12,41	19,15	27,55
7	10,53	19,56	8,52	18,09	19,64
8	8,04	16,68	5,23	15,43	15,29
9	6,94	13,28	5,23	15,43	14,76
10	5,23	10,54	5,08	10,64	14,7
11	4,08	8,15	3,44	6,91	11,06
12	3,71	6,8	3,59	3,72	8,46
13	3,56	6,13	2,24	3,72	6,98
14	2,6	3,41	1,2	2,66	6,21
15	1,75	3,41	0,6	2,66	5,17
16	1,3	2,61	0,6	1,6	4,22
17	0,77	1,81	0,6	1,6	3,5
18	0,29	1,26	0,45	1,6	2,72
19	0	0,56	0,45	0	2,26
20		0	0,45		1,88
21			0,45		1,69
22			0		1,61
23					0,9
24					0,54
25					0,36
26					0,19
27					0

Tabla 2: Datos sobre cuantía de siniestros pendiente de declarar semanal (%)

Estos datos han sido elaborados por el departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio de Compensación de Seguros (entidad pública dependiente del Ministerio de Asuntos Económicos y Transición Digital de España) para aplicar exclusivamente en esta investigación. La forma en que se presentan, en porcentaje sobre la cuantía total declarada semanalmente, hace que no afecte el paso del tiempo en los mismos. Esto es, así expresados, los datos permiten evitar la brecha temporal para su uso en diferentes momentos del tiempo. La cuantía de la catástrofe analizada podría ser mayor en la actualidad, pero el porcentaje declarado en la primera semana seguiría siendo aproximadamente el mismo (fundamentalmente porque en la mayoría de los casos, la población, las infraestructuras públicas y las viviendas no se han visto prácticamente modificadas en las zonas afectadas, después de la reconstrucción).

Para cada siniestro, se aplica el procedimiento de optimización descrito anteriormente. En la Tabla 3 se presentan los parámetros del modelo propuesto asociados a cada una de las catástrofes consideradas:

	α	t_m
Alcira (01/10/1991)	0,378	0,936
Barcelona 1 (14/09/1999)	0,248	0,961
Barcelona 2 (20/10/2000)	0,423	1,470
Zaragoza (20/10/2000)	0,274	0,002
Valencia (20/10/2000)	0,250	1,982

Tabla 3: Parámetros

Como puede observarse en los resultados obtenidos, para las catástrofes de Alcira, Barcelona 1 y Barcelona 2, el momento de cambio en la intensidad del proceso de declaración se sitúa en torno a la primera semana (0,936; 0,961 y 1,47 respectivamente). En la inundación de Zaragoza, el cambio en el ritmo de la declaración de siniestros es casi inmediato después de producirse la catástrofe de forma que, en este caso, podría decirse que el valor de t_m es prácticamente nulo y, por tanto, la declaración de siniestros se ajusta en todo momento a un modelo con tasa de declaración de siniestros constante al nivel 0,274. Finalmente, para la inundación de Valencia, el cambio en el ritmo de las declaraciones se produce dos semanas después de la ocurrencia de la catástrofe. En todos los casos es evidente que este cambio tiene lugar al principio del proceso declaración teniendo en cuenta que, en media, el proceso de declaración de siniestros dura 21 (21,4) semanas.

La Tabla 4 muestra los resultados globales del valor medio del error cuadrático cometido, así como el valor del error cuadrático medio acumulado, y la media y la desviación estándar de dicho error en 10.000 iteraciones del proceso de optimización.

Alcira	83,92
Barcelona 1	26,54
Barcelona 2	65,25
Zaragoza	534,56
Valencia	129,31

Error cuadrático medio (ECM) acumulado	839,58
ECM medio	119,94
Desviación estándar el ECM	231,175

Tabla 4: Resultados globales del proceso de optimización

Finalmente, la Tabla 5 muestra los p-valores resultantes de la aplicación de la prueba de bondad de ajuste de Kolmogórov-Smirnov (K-S) para dos muestras independientes y para un nivel de significación del 5%.

Serie	p-valor
Alcira	0,559560
Barcelona 1	0,999981
Barcelona 2	0,123724
Zaragoza	0,978036
Valencia	0,763383

Tabla 5: Test K-S

Los p-valores obtenidos para todas las series de datos analizadas permiten concluir que las dos muestras provienen de la misma población y, por tanto, tienen la misma distribución. En conclusión, el modelo mixto presentado ajusta fielmente la realidad catastrófica que queremos representar.

7. CONCLUSIONES

El modelo propuesto para la distribución de probabilidad del importe total de los siniestros declarados permite calcular de forma simple la ratio de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes. El núcleo del modelo es la definición de la dinámica decreciente de la variable cuantía de los siniestros pendiente de declarar basada en un modelo mixto en el que la tasa de declaración de siniestros se define creciente hasta un determinado momento del tiempo y constante a partir de ese momento y hasta el final del periodo de declaración considerado. En esta primera parte de la modelación hemos considerado una tasa de declaración de siniestros determinista y se ha verificado que la función resultante de aplicar dicha tasa cumple las propiedades matemáticas deseables de continuidad y derivabilidad para incorporar a posteriori la aleatoriedad mediante procesos de Wiener y de crecimiento y curvatura para representar adecuadamente la declaración real de los siniestros.
La relativa simplicidad del modelo presentado facilita la estimación de parámetros y la simulación. En este trabajo, la aplicación de las técnicas de estrategias evolutivas permite optimizar los valores de los parámetros del modelo propuesto mediante la optimización del error cuadrático acumulativo. Finalmente, el contraste de Kolmogórov-Smirnov permite concluir que los datos reales de los que partimos provienen de la misma distribución de probabilidad seguida por la cuantía de siniestros pendiente de declarar definida con tasa de declaración de siniestros mixta.

RECEIVED: OCTOBER, 2023.
REVISED: JANUARY, 2024.

REFERENCIAS

[1] AASE, K. (1999): An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. **Geneva Papers on Risk and Insurance Theory**, 24(1), 69-96.
[2] AASE, K. (2001): A Markov Model for the Pricing of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. **Journal of Risk and Insurance**, 68(1), 25-50.
[3] BÄCK, T. (1996): **Evolutionary Algorithms in Theory and Practice**. Oxford University Press, Inc.
[4] BARYSHNIKOV, Y., MAYO, A. y TAYLOR, D.R. (2001): Pricing of Cat Bonds, Working Paper, Version October. Disponible en: https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.202.9296&rep=rep1&type=pdf
[5] BIAGINI, F., BREGMAN, Y. y MEYER-BRANDIS, T. (2008): Pricing of catastrophe insurance options written on a loss index with reestimation. **Insurance: Mathematics and Economics**, 43(2), 214-222.
[6] BRAUN, A. (2011): Pricing catastrophe swaps: A contingent claims approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, 49(3), 520-536.
[7] BURNECKI, K. (2005): Pricing catastrophe bonds in a compound non-homogeneous Poisson model with left truncated loss distributions. Presentation Wroclaw University of Technology. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/289106928_Pricing_of_Catastrophe_Bonds
[8] BURNECKI, K. y KUKLA, G. (2003): Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds. **Applicationes Mathematicae**, 30, 315- 324.
[9] COX J.C., INGERSOLL, J.E. Y ROSS, S.A. (1985): A theory of the term structure of interest rates. **Econometrica**, 53, 385–407
[10] COX, S. H. Y PEDERSEN, H. (2000): Catastrophe Risk Bonds. **North American Actuarial Journal**, 4 (4), 56-82.

[11] CUMMINS J. D. y GEMAN, H. (1995): Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach. **Journal of Fixed Income,** 4 (4), 46-57.
[12] CHANG, C.W., CHANG, J.S.K. y LU, W. (2010): Pricing catastrophe options with stochastic claim arrival intensity in claim time. **Journal of Banking & Finance**, 34 (1), 24-32.
[13] EGAMI, M. y YOUNG, V. (2008): Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds. **Insurance: Mathematics and Economics**, 42(2), 771-778.
[14] EMBRECHTS, P. y MEISTER, S. (1997): Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures. En **Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk, Georgia State University**, Atlanta, Georgia. Society of Actuaries, Monograph M-FI97-1: 15-26.
[15] FOGEL, D.B. (1997): The Advantages of Evolutionary Computation. **Proc. of BCEC97: BioComputing and Emergent Computation, D. Lundh, B. Olsson, and A. Narayanan (eds.),** 1-11, World Scientific, Singapore.
[16] GEMAN, H. y YOR, M. (1997): Stochastic time changes in catastrophe option pricing. **Insurance: Mathematics and Economics**, 21(3),185-193.
[17] HOLLAND, J.H (1975). **Adaptation in natural an artificial Systems**, MIT Press, Bradford Books edition, Michigan.
[18] JAIMUNGAL, S. y WANG, T. (2006): Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses. **Insurance: Mathematics and Economics**, 38(3), 469-483.
[19] LAI, V. S., PARCOLLET, M. y LAMOND, B. F. (2014): The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk. **International Review of Financial Analysis**, 33(C), 243-252.
[20] LEE, J. P. y YU, M. T. (2002): Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk. **Journal of Risk and Insurance**, 69 (1), 25-44.
[21] LOUBERGÉ, H., KELLEZI, E. y GILLI, M. (1999): Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds. **Journal of Insurance Issues**, 22 (2), 125-146.
[22] MUERMANN, A. (2003): Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives. Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center, 03-18, 2003. Disponible en: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.387.1798&rep=rep1&type=pdf
[23] NOWAK, P. y ROMANIUK, M (2013): Princing and simulations of catastrophe Bonds. **Insurance: Mathematics and Economics**, 52(1), 18-28.
[24] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2005): La titulización del riesgo catastrófico: descripción y análisis de los *cat bonds (Bonos de Catástrofes).* **Revista Española de Seguros**, 121, 75-92.

[25] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2008): Modelling loss index triggers for CAT bonds: a continuous approach. **Variance**, 2(2), 253-265.
[26] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2009): Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS): A continuous model. **Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance**, 3(2), 1-13.
[27] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2016): Tarificación de derivados sobre catástrofes con desencadenantes de índices de pérdidas: modelo asintótico basado en un proceso de Wiener. **Rect@**, 17(1), 81-103.
[28] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2017): Tarificación de bonos sobre catástrofes (cat bonds) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelización mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. **Revista de métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa**, 24, 340-361.
[29] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2022): Comparación de tres modelos estocásticos para calcular un índice de pérdidas desencadenante de los CAT Bonds. **Revista Investigación Operacional**, 43(2), 228-240.
[30] POLACEK, A. (2018). “Catastrophe bonds: A primer and retrospective”. [online] Chicago Fed Leeter, The Federal Reserve Bank of Chicago. Disponible en: https:// https://www.chicagofed.org/publications/chicago-fed-letter/2018/405
[31] SCHEWEFEL, H.P. (1988): Evolutionary learning optimum-seeking on parallel computer architectures. In A. Sydow, S. G. Tzafestas, and R. Vichnevetsky, editors, 217-225 **Proceedings of the International Symposium on Systems Analysis and Simulation 1988, I: Theory and Foundations**. Akademie-Verlag, Berlin.
[32] SHAO, J., PANTELOUS, A., PAPAIOANNOU, A. D. (2015): Catastrophe risk bonds with applications to earthquakes. **European Actuarial Journal**, 5: 113-138
[33] TÖRN, A. Y ZILINSKAS, A. (1991): Global Optimization. **Lecture Notes in Computer Science, vol 350**, Springer, Berlin.
[34] UNGER, A.J.A. (2010): Pricing index-based catastrophe bonds: Part 1. Formulation and discretization issues using a numerical PDE approach. **Computers & Geosciences**, 36 (2), 139-149.
[35] ZONG-GANG, M. y CHAO-QUN, M. (2013): Princing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method. **Insurance: Mathematics and Economics**, 52 (2), 243-254.