

# MODELO MATEMÁTICO APLICADO A LA DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

A. Carrión<sup>\*,\*\*</sup>, R. Sánchez<sup>\*\*\*</sup>, F. Rodríguez<sup>\*\*\*</sup>, J. G. Chicaiza<sup>\*\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Escuela Superior Politécnica del Litoral, Ecuador

<sup>\*\*</sup>Universidad ECOTEC, Ecuador

<sup>\*\*\*</sup>Universidad de la Habana, Cuba

<sup>\*\*\*\*</sup>Escuela Superior Politécnica Agropecuaria Manuel Félix López, Ecuador

1

## ABSTRACT

A system of differential equations is presented to model the teaching-learning process of a person considering that there are relationships between the contents to be learned. A population dynamic inspired by a variant of the well-known SIR epidemiological model, with non-constant population, is used. Making an analogy with it, the classes of susceptible, infected and recovered are identified, with knowledge that can be learned, learned and forgotten, respectively. The algorithms that simulate the learning dynamics are presented and the data obtained from this process are compared with the numerical results of the proposed models. To do this, adjustments are made to their parameters, and their variations between the different model proposals are analyzed.

**KEYWORDS:** SIR epidemiological model, teaching-learning process, system of differential equations.

## RESUMEN

Se presenta un sistema de ecuaciones diferenciales para modelar el proceso de enseñanza-aprendizaje de una persona considerando que existen relaciones entre los contenidos que se deben aprender. Se utiliza una dinámica poblacional inspirada en una variante del conocido modelo epidemiológico SIR, con población no constante. Haciendo una analogía con el mismo, se identifican las clases: susceptibles, infectados y recuperados, con conocimientos susceptibles de ser adquiridos, aprendidos y olvidados, respectivamente. Se presentan los algoritmos que simulan la dinámica de aprendizaje y los datos obtenidos de este proceso se comparan con los resultados numéricos de los modelos propuestos. Para ello, se hacen ajustes en los parámetros de los mismos, y se analizan las variaciones de estos entre las distintas propuestas de modelos.

**PALABRAS CLAVE:** Modelo epidemiológico SIR, proceso enseñanza-aprendizaje, sistema de ecuaciones diferenciales.

## 1. INTRODUCCIÓN

El estudio y comprensión del proceso de aprendizaje es un campo multidisciplinario cuyo estudio se ha tornado un área muy activa de investigación. Resultados recientes, acerca de dicho tema, han sido presentados por parte de psicólogos y sociólogos [6, 9]. De hecho, sugieren que el proceso de aprendizaje tiene lugar cuando las personas participan en comunidades sociales [8]. El aprendizaje no está restringido a ningún tipo de educación intencional, sino que incluye todo tipo de actividad social.

El aprendizaje es un proceso de naturaleza extremadamente compleja, cuya esencia es la adquisición de un nuevo conocimiento, habilidad o capacidad. Para que dicho proceso pueda considerarse realmente como aprendizaje, en lugar de una simple huella o retención pasajera, debe poder manifestarse en un tiempo futuro y contribuir a la solución de problemas concretos [4].

Se considera que el propósito esencial de la enseñanza es la transmisión de información mediante la comunicación directa o soportada en medios auxiliares, que presentan un mayor o menor grado de complejidad y costo. Como resultado de esta acción debe quedar una huella en el individuo, un reflejo de la realidad objetiva del mundo circundante que, en forma de conocimiento, habilidades y capacidades, le permitan enfrentarse a situaciones nuevas con una actitud creadora.

El Proceso de Enseñanza- Aprendizaje (PEA) es de interacción social en un medio socio- histórico concreto, en el que el estudiante se inserta como sujeto y objeto del aprendizaje; esto lo realiza asumiendo una posición activa y responsable en su proceso de formación. Uno de los enfoques desde el cuál se estudia el proceso de enseñanza-aprendizaje es el enfoque cuantitativo. Ejemplo de ello es el trabajo de los investigadores Bordona y Albano [4], en el que se propone un modelo para describir el proceso de enseñanza-aprendizaje que tiene lugar debido a interacciones de los estudiantes en el aula o a través de las redes.

Las ecuaciones diferenciales son una herramienta indispensable en la modelación de fenómenos y procesos biológicos, químicos y físicos. La modelación matemática nos permite establecer relaciones entre dichos fenómenos o procesos biológicos mediante variables y parámetros para poder estudiar sistemas complejos. En

---

<sup>1</sup> ricardo.sanchez@matcom.uh.cu

este caso, el interés de estudio son los modelos epidemiológicos de las enfermedades virales adaptados al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Los modelos basados en ecuaciones diferenciales han sido utilizados desde hace varios años para describir las dinámicas poblacionales. Usualmente se basan en dividir cierta población (constante o no) en clases, separando a los elementos dominantes (predadores, población infectada, etc.) de los elementos afectados (presas, población sana, etc.). Sin embargo, para adaptarlos a datos reales es necesario añadir variables o parámetros que dependen de las mediciones hechas a lo largo del proceso y del comportamiento particular de la población estudiada.

Existen varios modelos que se utilizan en la descripción de la dinámica de las epidemias, entre los que destacan los modelos compartimentales del tipo SIR, SIS, SEIR, entre otros [10, 12]. Uno de los más utilizados es el SIR, donde se divide a la población de individuos en tres clases. La primera es la clase S, que corresponde al grupo de individuos susceptibles a una enfermedad transmisible. Estas personas no tienen inmunidad contra el agente infeccioso por lo que podrían infectarse si se exponen. La segunda clase, que se denota por I, representa el grupo de individuos infectados, los cuales son capaces de transmitir la enfermedad a las personas susceptibles con las que entran en contacto. Por último, la clase R representa a los individuos recuperados de la infección, es decir, aquellos que han tenido la infección y que se convierten en inmunes a la enfermedad. Como consecuencia estos sujetos no afectan a la dinámica de la transmisión de la enfermedad cuando entran en contacto con otras personas.

En el presente trabajo se utiliza un modelo tipo SIR para una descripción simplificada del proceso de enseñanza-aprendizaje de un solo individuo. Para ello, se establece una analogía entre las clases que se consideran para la descripción de un proceso epidemiológico, con el estado de adquisición del conocimiento de la persona. En el proceso de analogía se realiza una correspondencia entre las clases de susceptible, infectado y recuperado con los conocimientos susceptibles a ser aprendidos, los que han sido aprendidos y los olvidados, respectivamente. Se asume, además, que la cantidad de conocimientos susceptibles a aprender aumenta a medida que aumenta el número de conocimientos aprendidos. Esta última condición responde al hecho de que, mientras más se conoce sobre cierto tema, aumenta la posibilidad de aprender contenidos relacionados con el mismo. Para esta clasificación por conjuntos de elementos susceptibles y aprendidos se puede hacer una analogía con la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), introducida por el psicólogo Lev Vygotsky [16], que es la diferencia entre dos niveles evolutivos de las capacidades del individuo: el de sus capacidades reales para realizar una tarea por sí solo y el de sus capacidades de poder realizar una tarea con ayuda de otra persona.

El objetivo de este trabajo es el análisis y diseño de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, inspirados en modelos epidemiológicos y basados en el modelo SIR, que permitan modelar el proceso de enseñanza-aprendizaje de una persona. Los campos de susceptibles (S), infectados (I) y recuperados (R) serán identificados con los diferentes estadios del conocimiento. Durante el proceso de aprendizaje el número de conocimientos que es posible incorporar en un momento dado depende del conocimiento que ya posea el individuo. Es por esto que durante la adaptación de los modelos SIR se propone la inclusión de una tasa de crecimiento proporcional al número de infectados en el campo de los susceptibles.

## 2. EL MODELO SIR

En el análisis de epidemias, la modelación matemática ha devenido en una poderosa herramienta a fin de comprender y pronosticar la dinámica de transmisión. Los modelos más empleados en la predicción de epidemias son de tipo fenomenológicos o mecanicistas [15]. Estos incluyen leyes físicas o mecanismos involucrados en la dinámica del problema bajo estudio. Entre ellos, los modelos de compartimentos están basados en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que se concentran en la evolución dinámica de una población por diferentes estados epidémicos. La deducción de un modelo matemático requiere de una abstracción de la realidad, o sea, de una representación del sistema bajo estudio, de la cual se conozcan sus reglas y símbolos. A esta representación se le conoce como modelo físico y su concepción se hace necesaria para explicar los fenómenos que ocurren asociados a un determinado proceso [15].

Los modelos de compartimentos son herramientas matemáticas que permiten caracterizar determinados comportamientos de las epidemias. Los pioneros de este tipo de modelo fueron W. O. Kermack y A. G. McKendrick [10], con la creación del modelo SIR. Desde entonces, usándolo como base, se han desarrollado muchos otros modelos de compartimentos en dependencia de las características de la epidemia que se estudia y del entorno social donde esta se desarrolla [14]. A pesar de su simplicidad, este modelo es capaz de describir el comportamiento de epidemias y las curvas de predicción se ajustan muy bien a los datos reales [1].

El modelo SIR ha sido concebido con tres compartimentos: los individuos susceptibles de ser infectados (S), los infectados (I) y los recuperados (R). El número de individuos susceptibles depende de la capacidad inmunológica de la población para combatir la enfermedad. El incremento de los casos infectados depende de la coexistencia de infectados y susceptibles. Los recuperados alcanzan esta condición después de rebasar la enfermedad y de adquirir un nivel de inmunidad que pudiera ser permanente o temporal, en función de las características de la enfermedad.

El comportamiento de un sistema de ecuaciones diferenciales a lo largo del tiempo puede “predecirse” a partir de un análisis de estabilidad. Con este sabremos si las soluciones se aproximarán a algún valor específico

(puntos estacionarios o críticos), o las variaciones que pueden sufrir las soluciones a consecuencia de pequeños cambios en las condiciones iniciales.

La versión clásica del modelo *SIR* tiene las siguientes características:

- La población es cerrada: no se consideran muertes ni nacimientos.
- Para que un individuo abandone el grupo de los susceptibles ha de hacerlo por convertirse en individuo infeccioso.
- Se asume que la transmisión es por contacto directo.
- Para transmitir la infección, un infectado hace contacto con  $\beta I$  individuos por unidad de tiempo. La probabilidad de contacto entre un infectado y un susceptible es  $S/N$ , donde  $N$  es el tamaño de la población.
- Un individuo puede abandonar el grupo de los infectados por recuperación de la enfermedad.
- Se asume que la proporción de individuos infectados que se recuperan en un día,  $\gamma$ , es fija.

El sistema de ecuaciones diferenciales, según la descripción anterior, resulta:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta SI, & S(0) &= S_0 \\ I' &= \beta SI - \gamma I, & I(0) &= I_0 \\ R' &= \gamma I, & R(0) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Se considera además que la población es constante, con lo cual, se tiene:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N.$$

Si se asume que no hay recuperados al inicio del proceso, o sea,  $R(0) = 0$ .

Entonces  $N = S(0) + I(0) = S_0 + I_0$ .

Para comprender con más claridad el comportamiento de este modelo en función de la variación de sus parámetros, es necesario hacer un análisis de estabilidad.

### 3. NOTAS SOBRE ESTABILIDAD DE SISTEMAS NO LINEALES

Un sistema no lineal puede representarse por:

$$\dot{x} = f(x, t),$$

donde  $x$  representa un vector de funciones dependientes del tiempo. Un sistema será autónomo si la función  $f$  no tiene dependencia del tiempo, o sea:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2)$$

Los puntos estacionarios (o críticos) del sistema (2) serán las soluciones de la ecuación  $f(x) = 0$ .

**Definición:** Un punto estacionario  $x_0$  es estable si, para cualquier  $R > 0$ , hay un  $r > 0$  tal que satisface  $\|x(0)\| < r$ , entonces  $\|x(t)\| < R$  para todo  $t \geq 0$ . Si no cumple con lo anterior, entonces el punto de equilibrio es inestable.

Lo anterior implica que todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto estacionario permanecen en la cercanía del mismo. De otro modo, el punto es inestable.

**Definición:** Un punto de equilibrio  $x_0$  es asintóticamente estable si es estable y, en adición, existe algún  $r > 0$  tal que  $\|x(0)\| < r$  implica que  $x(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Lo anterior implica que todas las soluciones que se inicien en las cercanías del punto estacionario no solo permanecen en la cercanía del mismo, sino que tienden al punto en el infinito.

Uno de los métodos más comunes para el análisis de estabilidad es el método de Lyapunov [5]. Este sirve como justificación para el uso de técnicas lineales en sistemas no lineales. Su aplicación analítica consiste en considerar la aproximación lineal del sistema (2) a partir de la evaluación de la matriz jacobiana en el punto estacionario:

$$J(x_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0} : \quad \dot{x} = J(x_0)x. \quad (3)$$

**Teorema:** Sea  $x_0$  un punto estacionario del sistema no lineal (2), donde  $f: D \subset \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable y  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un entorno del punto estacionario. Entonces  $x_0$  es *asintóticamente estable* si todos los valores propios de la matriz  $J(x_0)$  tienen parte real negativa. Así mismo,  $x_0$  será *inestable* si existe al menos un valor propio con parte real positiva.

### 4. NÚMERO REPRODUCTIVO BÁSICO

Retomando el modelo (1) puede observarse que en el sistema la ecuación para  $\dot{R}$  es independiente de las dos primeras ecuaciones. Es por esto que, en el estudio del modelo, basta con tomar estas primeras dos ecuaciones para el análisis. Se comenzará por presentar los puntos estacionarios:

$$P_1(0,0), P_2(S, 0), P_3\left(\frac{\gamma}{\beta}, 0\right). \quad (4)$$

El Jacobiano del sistema estará dado por la matriz:

$$J = \begin{pmatrix} -\beta I & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \gamma \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Evaluando en  $P_1$  el Jacobiano del sistema es:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Los valores propios son 0 y  $-\gamma$ , que es negativo. Además, se observa que  $\dot{S} < 0$  y  $\dot{I} < 0$  para  $S < \gamma/\beta$ . Con lo cual, este será un punto estable.

Para  $P_2$ , la matriz jacobiana resulta:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta S \\ 0 & \beta S - \gamma \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Por lo tanto, se tiene que, mientras  $S > \gamma/\beta$  las soluciones se alejarán de este punto. Para  $S < \gamma/\beta$  se tiene una solución parcialmente estable. Este comportamiento ya describe lo que sucede alrededor del punto  $P_3$ , en cuya vecindad el valor de  $\dot{I}$  cambia de signo; por lo tanto, este será un punto inestable.

Se puede concluir entonces que el modelo SIR presentado en (1), el número de infectados va a crecer mientras:

$$S < \frac{\gamma}{\beta}. \quad (8)$$

Es por esto que la expresión  $\gamma/\beta$  es conocida como el umbral epidémico. El número

$$R_0 = \frac{S_0}{\gamma/\beta} = \frac{\beta S_0}{\gamma} \quad (9)$$

se define como *número reproductivo básico*. Teniendo en cuenta los resultados de estabilidad, este número nos proporciona una medida de cuántas infecciones nuevas se originarán a partir de un individuo infectado. Si  $R_0 < 1$  no habrá un brote epidémico mientras que, si  $R_0 > 1$ , habrá un brote epidémico.

Como puede observarse, el avance de la epidemia queda determinado por la población inicial y los parámetros que intervienen en el modelo de ecuaciones diferenciales. Los valores que toman estos parámetros dependen, a su vez, de la evolución de la epidemia en un rango inicial de tiempo. Para obtener estos valores se utilizan variantes numéricas de ajuste de parámetros en ecuaciones diferenciales, como el método de mínimos cuadrados [12].

## 5. VARIANTES DEL MODELO SIR

Una de las modificaciones más habituales en el modelo *SIR* es la inclusión de una tasa de crecimiento en la población susceptible. Este crecimiento puede estar dado por la consideración de los nacimientos en la población [2, 7]. El efecto que tiene esta consideración en el modelo clásico es la aparición de un nuevo parámetro  $\alpha$  en la ecuación para  $S'$ , cuando la tasa de crecimiento es constante:

$$S' = \alpha - \beta SI \quad (10)$$

o del término  $\alpha I$  cuando se considera una tasa de crecimiento exponencial:

$$S' = \alpha I - \beta SI. \quad (11)$$

Teniendo en cuenta que el objetivo de esta investigación es el uso de estos modelos para la descripción de un proceso de enseñanza-aprendizaje, la tasa de crecimiento que se propone para la población susceptible es proporcional al número de los infectados. Por tanto, se incluye el término  $\alpha I$  en la ecuación de  $S'$  en las tres propuestas que se presentan.

La consideración del crecimiento de la población susceptible afecta una de las premisas de modelo SIR clásico: la población de estudio ya no es constante. En los estudios de modelos con población no constante es común el uso de la tasa de incidencia estándar  $\beta \frac{SI}{N}$  en lugar de la llamada incidencia de acción de masa  $\beta SI$ , siendo  $N$  la población total en cada instante de tiempo [13].

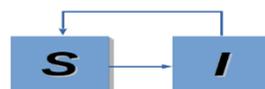
La tasa de incidencia estándar, que consiste en una normalización de la población, se usa cuando la tasa de contacto no puede aumentar indefinidamente, aun cuando haya un aumento significativo de la población. Esta es la que se utiliza en las tres propuestas que se presentan a continuación.

### 5.1 Modelo SIS

Se considera un primer modelo con las siguientes características:

- Para que un individuo abandone el grupo de los susceptibles ha de hacerlo por convertirse en individuo infectado.
- Se asume que la transmisión es por contacto directo. La probabilidad de contacto entre un infectado y un susceptible es  $SI/N$ . Un individuo contactado por un infectado se contagia con una probabilidad  $\beta$ .
- Un individuo puede abandonar el grupo de los infectados por recuperación de la enfermedad y pasa nuevamente a ser susceptible.
- Se asume que la proporción de individuos infectados que se recuperan y pasan a ser susceptibles en un día,  $\gamma$ , es fija.

La figura 1 ilustra el flujo de los individuos en un modelo SIS.



**Figura 1:** Esquema del modelo SIS.

El sistema de ecuaciones diferenciales queda descrito como:

$$\begin{aligned} S' &= -\beta \frac{SI}{N} + \gamma I, S(0) = S_0 \\ I' &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, I(0) = I_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Al modelo SIS dado por las ecuaciones (12) se añade la condición de que el número de susceptibles varía proporcionalmente al número de infectados con una tasa  $\alpha$ . Esta condición responderá al hecho de que, a medida que un individuo aprende, existen más conocimientos susceptibles a ser aprendidos. Considerando lo anterior, el modelo (12) da paso al siguiente modelo:

$$\begin{aligned} S' &= (\alpha + \gamma)I - \beta \frac{SI}{N}, S(0) = S_0 \\ I' &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, I(0) = I_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Se tiene una dependencia de  $t$  en la relación  $S(t) + I(t) = N(t)$  ya que la cantidad de población no es constante.

A continuación se realiza un análisis de la estabilidad del sistema (13). El punto estacionario será la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} (\alpha + \gamma)I - \beta \frac{SI}{N} &= 0 \\ \beta \frac{SI}{N} - \gamma I &= 0. \end{aligned} \Rightarrow (S, 0) \quad (14)$$

Se calcula la matriz Jacobiana para luego evaluarla en el punto obtenido anteriormente:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \frac{I^2}{N^2} & \alpha + \gamma - \frac{\beta S^2}{N^2} \\ \beta \frac{I^2}{N^2} & \frac{\beta S^2}{N^2} - \gamma \end{pmatrix}. \quad (15)$$

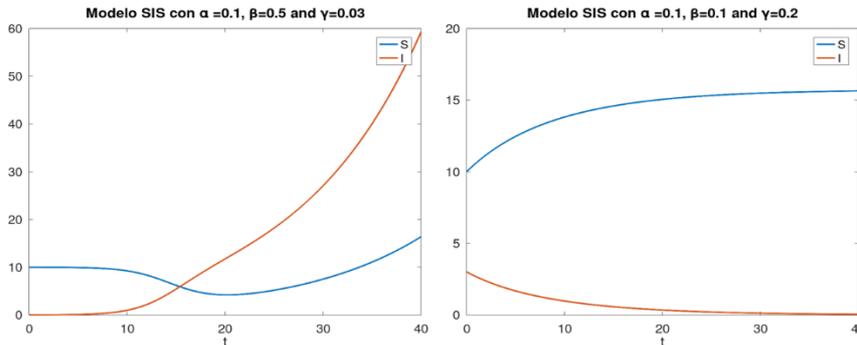
Al sustituir el punto estacionario en la matriz Jacobiana se obtiene:

$$J(S, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha - \beta + \gamma \\ 0 & \beta - \gamma \end{pmatrix}, \quad (16)$$

cuyos valores propios son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \beta - \gamma$ . Se obtiene entonces que el punto estacionario es estable (estabilidad no asintótica), cuando:  $\beta \leq \gamma$ . (17)

Este comportamiento se puede observar en la figura 2. En esta se selecciona una combinación de parámetros de forma que en la figura de la izquierda no se cumple la condición (17), mientras que en la figura de la derecha sí se satisface, por lo que se muestra un comportamiento estable para el punto estacionario.

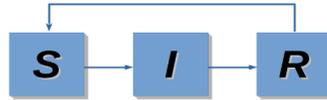
En esta primera variación del modelo SIR se presenta un comportamiento en el cual no existe población recuperada, sino que los individuos que abandonan el grupo de los infectados pasan directamente a ser susceptibles. Para este tipo de modelo, se obtiene la estabilidad en un punto  $(S, 0)$  cuando  $\beta \leq \gamma$ .



**Figura 2:** Sistema SIS para dos combinaciones de parámetros: a la izquierda, con punto estacionario no estable; a la derecha, con punto estacionario estable.

## 5.2 Modelo SIRS

En esta sección se estudia el modelo SIRS, uno de los más utilizados en el análisis de epidemias. En este se tiene en cuenta la población de recuperados R, o sea, la dinámica se manifiesta ahora de forma que los susceptibles pasan a ser infectados y estos últimos a ser recuperados. A diferencia del modelo SIR clásico, en esta nueva variante, cierta parte de los individuos recuperados pasa nuevamente a ser susceptible (figura 3).



**Figura 3:** Esquema del modelo SIRS.

Se asume que la proporción de individuos recuperados que pasan a ser susceptibles por día,  $\eta$ , es fija. En el caso de que  $\eta = 0$ , el modelo coincide con el SIR descrito por [10], dado en el Sistema de Ecuaciones Diferenciales (1).

Como en el caso anterior, se considera también la variación con tasa  $\alpha$  de los susceptibles, proporcional al número de infectados.

Para estas condiciones el modelo es:

$$\begin{aligned} S' &= \alpha I - \beta \frac{SI}{N} + \eta R, S(0) = S_0 \\ I' &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I, I(0) = I_0 \\ R' &= \gamma I - \eta R, R(0) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

La matriz jacobiana del sistema es:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{S}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{S}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{I}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{I}}{\partial R} \\ \frac{\partial \dot{R}}{\partial S} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial I} & \frac{\partial \dot{R}}{\partial R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \frac{I(I+R)}{N^2} & \alpha - \frac{\beta S(S+R)}{N^2} & \eta + \frac{\beta SI}{N^2} \\ \beta \frac{I(I+R)}{N^2} & \frac{\beta S(S+R)}{N^2} - \gamma & -\beta \frac{SI}{N^2} \\ 0 & \gamma & -\eta \end{pmatrix}. \quad (19)$$

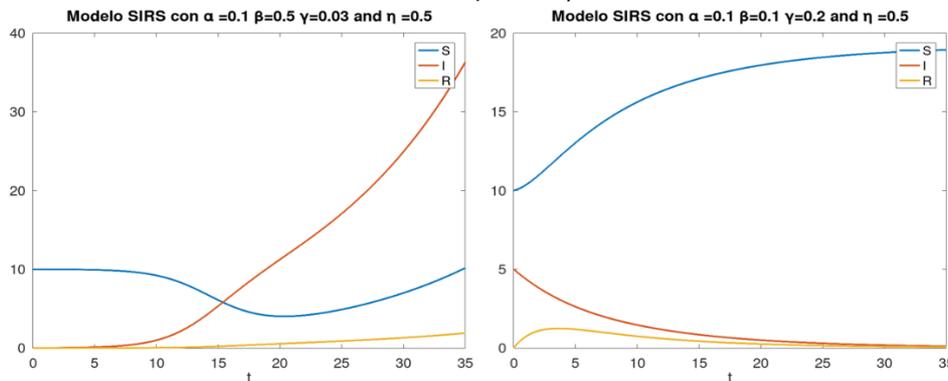
De forma análoga al caso anterior se puede hallar el punto estacionario a partir de la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \alpha I - \beta \frac{SI}{N} + \eta R &= 0 \\ \beta \frac{SI}{N} - \gamma I &= 0 \\ \gamma I - \eta R &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

cuya solución es  $(S;0;0)$ .

Así, la matriz jacobiana evaluada en dicho punto es:

$$J(S, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha - \beta & \eta \\ 0 & \beta - \gamma & 0 \\ 0 & \gamma & -\eta \end{pmatrix} \quad (21)$$



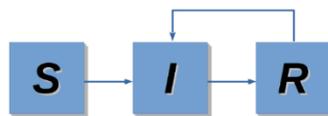
**Figura 4:** Sistema SIRS: a la izquierda, comportamiento para un punto estacionario inestable; a la derecha, para un punto estacionario estable.

y los autovalores son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \beta - \gamma$ ,  $\lambda_3 = -\eta$ . Asumiendo que todos los parámetros son positivos, se repite la condición de estabilidad (17), para  $\beta \leq \gamma$ ; en otro caso es inestable. Estos comportamientos pueden apreciarse en la figura 4, en la que nuevamente se seleccionan los parámetros de forma que se aprecien ambos comportamientos: el estable y el inestable.

Como se ha visto en esta sección, el modelo SIRS aporta una mayor dinámica a la evolución de las poblaciones. A pesar de esto, la condición de estabilidad es la misma que en el modelo SIS. A continuación, se presenta otra variación del modelo SIR la cual también considera los tres grupos poblacionales y resulta de gran utilidad en el proceso de aprendizaje.

### 5.3 Modelo SIRI

Una variante que es interesante considerar es la del modelo SIRI. En este caso los individuos que abandonan la población de recuperados no pasan a ser susceptibles sino infectados (figura 5). Es necesario aclarar que esta variante no es factible al intentar describir una epidemia, sin embargo, es muy provechosa para la adaptación de los modelos del proceso de enseñanza-aprendizaje que se presentan.



**Figura 5:** Esquema del modelo SIRI.

El sistema SIRI está dado por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} S' &= \alpha I - \beta \frac{SI}{N}, S(0) = S_0 \\ I' &= \beta \frac{SI}{N} - \gamma I + \eta R, I(0) = I_0 \\ R' &= \gamma I - \eta R, R(0) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Para este sistema se sigue teniendo el mismo punto estacionario que el obtenido para el modelo SIRS, de la forma  $(S;0;0)$  y la matriz jacobiana tiene una forma similar a (19):

$$J = \begin{pmatrix} -\beta \frac{I(I+R)}{N^2} & \alpha - \frac{\beta S(S+R)}{N^2} & \eta + \frac{\beta SI}{N^2} \\ \beta \frac{I(I+R)}{N^2} & \frac{\beta S(S+R)}{N^2} - \gamma & -\beta \frac{SI}{N^2} \\ 0 & \gamma & -\eta \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Esta matriz, evaluada en el punto estacionario, resulta:

$$J(S, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha - \beta & 0 \\ 0 & \beta - \gamma & \eta \\ 0 & \gamma & -\eta \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Los valores propios no nulos de esta matriz son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{2} \left( \sqrt{(\gamma + \eta - \beta)^2 + 4\eta\beta} + (\gamma + \eta - \beta) \right) \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{(\gamma + \eta - \beta)^2 + 4\eta\beta} - (\gamma + \eta - \beta) \right). \end{aligned} \quad (25)$$

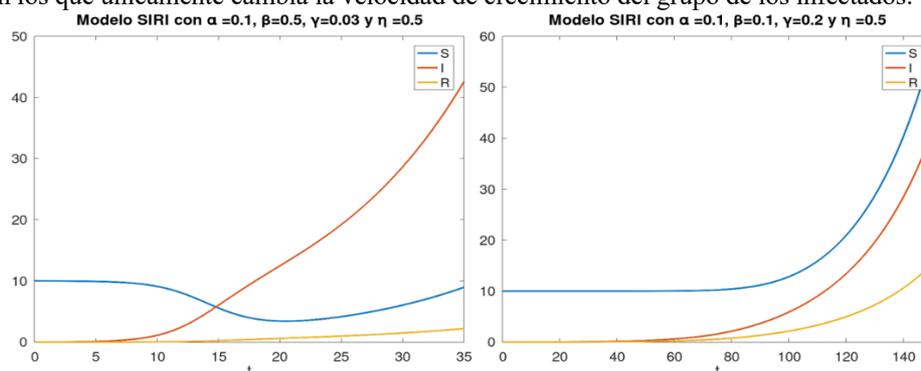
Nótese que:

$$\sqrt{(\gamma + \eta - \beta)^2 + 4\eta\beta} > \sqrt{(\gamma + \eta - \beta)^2} = |\gamma + \eta - \beta|.$$

Por tanto, se tiene que:

$$\begin{cases} \lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0 & \text{si } \gamma + \eta - \beta > 0 \\ \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 & \text{si } \gamma + \eta - \beta < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Luego, si  $\gamma + \eta - \beta \neq 0$ , el punto estacionario es inestable. La figura 6 muestran dos comportamientos, ambos inestables, en los que únicamente cambia la velocidad de crecimiento del grupo de los infectados.



**Figura 6:** Sistema SIRI para dos combinaciones de parámetros

El término  $\eta R$  en la ecuación de los infectados permite que la evolución de este grupo sea creciente para un tiempo lo suficientemente grande. Este comportamiento inestable en todo momento hace que el modelo no se identifique con el comportamiento de epidemia alguna. Nótese, además, que esta condición creciente de los infectados subsiste con el crecimiento del resto de los grupos. El valor de  $R_0$  que caracteriza la evolución de la epidemia pierde el sentido en esta propuesta de modelo. Este comportamiento es el que se asemeja al proceso de enseñanza- aprendizaje.

## 6. APLICACIÓN DE LOS MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS A LA DESCRIPCIÓN DE UN PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

Como se menciona anteriormente, los modelos mostrados en (13), (18) y (22) se utilizan para describir el proceso de aprendizaje de una persona. Podría considerarse que se intenta describir el proceso de aprendizaje de un estudiante que recibe contenidos, ya sea guiados por un docente o por un aprendizaje autodidacta a través de cualquier medio. Se tienen en cuenta las tres clases de población S, I y R, sin embargo, para la descripción del proceso de interés, la interpretación de los grupos es la siguiente:

- **Susceptibles (S):** los elementos que la persona pudiera aprender
- **Infectado (I):** los elementos que la persona conoce
- **Recuperado (R):** los elementos que la persona ha olvidado.

El proceso de aprendizaje se concibe de la siguiente forma: se cuenta inicialmente con un grupo de conocimientos susceptibles a ser aprendidos, con dependencias entre ellos. Cuando las dependencias de cierto conocimiento se encuentran en el conjunto de los aprendidos, entonces existe cierta probabilidad de pasar del grupo de los susceptibles al grupo de los conocimientos aprendidos (figura 7).



Figura 7: Esquema de aprendizaje.

Se supone, además, que los conocimientos susceptibles a aprender aumentan proporcionalmente al número de conocimientos aprendidos. Esto significaría que, a medida que el individuo aprende nuevos contenidos, le es posible entender nuevos temas, con lo cual, hay más contenido en el grupo de los susceptibles.

A partir de que los conocimientos se encuentran en el grupo de los aprendidos, el proceso de aprendizaje puede continuar con una de las siguientes variantes, en correspondencia con los modelos presentados anteriormente:

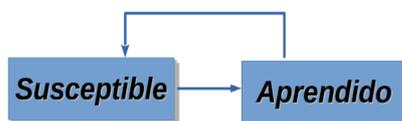


Figura 8: Esquema de aprendizaje de la variante SAS.

**SAS:** Del grupo de los conocimientos aprendidos, el cual se hace corresponder con la clase I, el conocimiento puede pasarse con cierta probabilidad nuevamente al grupo de los susceptibles. En este paso se tiene en cuenta que un conocimiento no puede hacer este tránsito en el mismo instante de tiempo en que es aprendido. Este comportamiento se corresponde con el modelo SIS dado en las ecuaciones (13).

**SAO:** Debe tenerse en cuenta que, una vez aprendido y luego olvidado un conocimiento, el proceso de aprendizaje de este no comienza desde el punto inicial. Es decir, un conocimiento que ha sido olvidado es más sencillo de aprender que un conocimiento que nunca ha sido visto. Es por ello que se considera esta otra variante en la que, del grupo de los conocimientos aprendidos, I, puede pasarse con cierta probabilidad al grupo de los olvidados, que estamos denotando por R, igualmente, teniendo en cuenta de que no se puede olvidar un conocimiento inmediatamente después de ser aprendido.

En este punto, se presentan dos variantes para la continuación del proceso de aprendizaje:

**SAOS:** Un conocimiento que se encuentra en el grupo de los olvidados tiene posibilidad de regresar al grupo de los susceptibles si sus dependencias están satisfechas, o sea, que las dependencias de estos conocimientos deben formar parte del conjunto de conocimientos aprendidos. Este comportamiento se corresponde con el modelo SIRS dado por las ecuaciones (18).

**SAOA:** Un conocimiento que se encuentra en el grupo de los olvidados tiene posibilidad de regresar al grupo de los aprendidos. Este comportamiento se corresponde con el modelo SIRS dado por las ecuaciones (22).

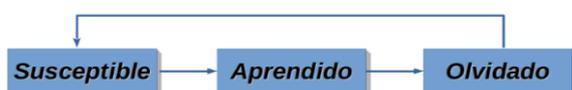


Figura 9: Esquema de aprendizaje de la variante SAOS.

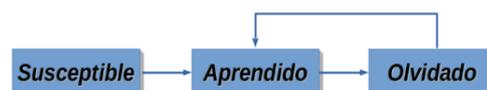


Figura 10: Esquema de aprendizaje de la variante SAOA.

Se considera que esta última variante refleja mejor el proceso real de aprendizaje. En el caso de la variante SAOS, los conocimientos olvidados pasan a ser susceptibles, o lo que es lo mismo, comienzan el proceso de aprendizaje desde el punto inicial. Sin embargo, un conocimiento que ha sido aprendido con anterioridad es mucho más fácil de incorporar nuevamente que un conocimiento que nunca se ha visto.

En la variante SAOA, los conocimientos olvidados pasan a ser aprendidos nuevamente, sin tener que transitar previamente por el grupo de susceptibles.

A continuación, se ilustra un proceso de aprendizaje para esclarecer la situación que se quiere modelar y los valores numéricos que se pretenden obtener. Se ha tomado como referencia la asignatura de Álgebra Lineal impartida en el primer año de varias carreras de ingeniería.

Es común encontrar las siguientes temáticas en el plan de estudios de ese año académico:

1. Definición y propiedades de vectores
2. Operaciones con vectores
3. Definición y propiedades de matrices
4. Operaciones con matrices
5. Dependencia e independencia lineal de vectores
6. Definición de espacios vectoriales
7. Generador, base y dimensión de un espacio vectorial
8. Matriz de cambio de base

Estos temas pueden identificarse como el campo de conocimientos a impartir. Estos tienen relación entre sí, una relación que podría llamarse dependencia, en el sentido de que, por ejemplo, no puede aprenderse el tema de operaciones con vectores si no se ha aprendido el tema de definición y propiedades de vectores. De este último tema depende también el tercero, definición y propiedades de matrices. Las operaciones con matrices, por su parte, dependerían del primero y del tercer tema.

De hecho, se pueden definir las dependencias para cada uno de los temas de la siguiente forma:

Temas	Dependencias
Definición de propiedades de vectores	
Operaciones de vectores	Definiciones y propiedades de vectores
Definición y propiedades de matrices	Definiciones y propiedades de vectores
Operaciones con matrices	Definiciones y propiedades de vectores Definiciones y propiedades de matrices
Dependencia e independencia lineal	Definiciones y propiedades de vectores Operaciones con matrices
Definición de espacios vectoriales	Definiciones y propiedades de vectores
Generador, base y dimensión	Dependencia e independencia lineal de vectores Definición de espacios vectoriales
Matriz de cambio de base	Definición de espacios vectoriales Generador, base y dimensión de un espacio vectorial

**Tabla 1:** Dependencias de los temas a aprender.

Si se identifican los conocimientos con el orden numérico de la lista, la tabla 1 de dependencias queda escrita como se muestra en la Tabla 2.

Temas	Dependencia 1	Dependencia 2
1		
2	1	
3	1	
4	1	3
5	1	4
6	1	
7	5	6
8	6	7

**Tabla 2:** Dependencias de los temas a aprender (numerados).

Esta tabla se le denomina matriz de conocimientos, en la cual se tendrá una primera columna con la numeración de los temas a aprender y el resto de las columnas corresponderán a las dependencias de estos conocimientos. En dicha matriz, los espacios vacíos en las dependencias se sustituyen por el valor 0, o sea, que la matriz de dependencias se puede apreciar en la tabla 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 6 \\ 8 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad (I)$$

La matriz de conocimientos se generará de forma automática, para después ser utilizada en la simulación del proceso de aprendizaje. Con la matriz de conocimientos del ejemplo anterior se puede ver que, al inicio del

proceso, el único conocimiento susceptible de ser aprendido es el número 1: Definición y propiedades de vectores, pues es el que no tiene ninguna dependencia de conocimientos anteriores. Una vez que se aprenda este conocimiento, se incorporan al grupo de los susceptibles los conocimientos 2 y 3, y así sucesivamente. Con la presentación de las variantes anteriores, ha quedado identificado el proceso de aprendizaje con los modelos matemáticos SIS, SIRS y SIRS. Para comprobar la factibilidad de estos modelos, se ha decidido generar ciertos datos que simulen el proceso de aprendizaje descrito anteriormente.

### 6.1 Generación de la matriz de conocimiento

De inicio, se genera una matriz en la que los conocimientos están representados por números en la primera columna de la misma. El resto de las columnas representarán las dependencias del conocimiento de la fila en cuestión.

Para realizar las simulaciones del proceso de aprendizaje propuesto, esta matriz se genera de forma automática a partir de una función que recibe como parámetros de entrada la cantidad de conocimientos ( $N$ ), la cantidad de dependencias máximas de cada conocimiento ( $n$ ) y el número de conocimientos sin dependencias ( $p$ ). El algoritmo dado en la tabla 3 muestra el proceso para la generación de la matriz de conocimientos.

---

**Algoritmo 1:** Generación de la matriz de conocimiento

---

**Entrada:**  $N, n, p$

Inicializar matriz de conocimientos  $M_{N \times n+1}$

Escribir en cada fila un número aleatorio  $k \leq p$  de dependencias

---

**Tabla 3:** Proceso para la generación de la matriz de conocimientos.

La tabla 4 refleja un ejemplo de matriz de conocimientos. Se representan 10 conocimientos diferentes en la primera columna de la matriz y cada uno de ellos tiene, como máximo, 3 dependencias. El valor 0 en las columnas 2 a la 3 representa la no dependencia. En el caso que se presenta en la tabla 4 tenemos que los 3 primeros conocimientos no tienen dependencia de ningún otro. El conocimiento 4 depende de los conocimientos 1 y 2. El conocimiento 5 depende solo del conocimiento 3. El conocimiento 7 depende de los conocimientos 2, 3 y 4. La matriz de conocimientos estará siempre organizada de forma que el conocimiento  $i$  pueda tener dependencia solamente de los  $i - 1$  conocimientos anteriores.

Conocimiento	Dependencia 1	Dependencia 2	Dependencia 3
1	0	0	0
2	0	0	0
3	0	0	0
4	1	2	0
5	3	0	0
6	2	0	0
7	2	3	4
8	3	4	6
9	2	0	0
10	4	0	0

**Tabla 4:** Matriz de conocimientos, con 10 contenidos diferentes. Los primeros contenidos no tienen dependencias.

Dado este algoritmo para la generación de la matriz de conocimiento se puede advertir que, si bien existe un número máximo de dependencias para cada conocimiento, el hecho de que no todos tengan el mismo número de dependencias se puede interpretar como que un conocimiento es más fácil o más difícil que otro. Esto significa que no todos los conocimientos tienen la misma probabilidad de ser incorporados al grupo de los susceptibles. Esta diferencia entre las probabilidades quedaría matizada o acentuada por la cota que se imponga para el número de dependencias.

Ya que el algoritmo escoge el número de dependencias para cada conocimiento de forma aleatoria, siempre menor que la cota impuesta, si el rango de selección es amplio, existen conocimientos que tienen mucha menos probabilidad de pasar a ser susceptibles que otros.

En esta sección se ha mostrado cómo se genera la matriz de conocimientos con la que es simulado el proceso de aprendizaje. Este es el primer paso en el proceso de simulación. Basándose en esta matriz, se muestra en la próxima sección cómo se generan los distintos procesos de aprendizaje según las variantes SAS, SAOS, SAAO, presentadas anteriormente.

### 6.2 Generación de la representación del proceso de aprendizaje

Como se señala en la sección anterior, los conocimientos han sido identificados con números. Con lo cual, la generación del proceso de aprendizaje consiste en simular numéricamente el ciclo de aprender-olvidar conocimientos y obtener, para cada instante de tiempo  $t$ , el número de conocimientos susceptibles a aprender, el número de conocimientos aprendidos y, en el caso de los modelos SIRS y SIRI, el número de conocimientos olvidados. La medición de los conocimientos adquiridos ha sido estudiada con anterioridad, sobre todo en materia de ciencias. El investigador Aikenhead [3], muestra técnicas para llevar a cabo este proceso por medio de la clasificación de los distintos tipos de pruebas, en dependencia de qué aspecto quiere medirse: la comprensión, la influencia social, etc.

La estructura de la materia a partir de conceptos hace más sencillo el proceso de medición. Es por ello que existen ya resultados que muestran estas medidas separadas por variables que atienden el pensamiento del estudiante, la profundidad de la interpretación, el contenido matemático, etc [11].

En la presente sección se concibe un proceso de enseñanza-aprendizaje que se corresponde con los modelos epidemiológicos dados en la sección anterior. Se entiende ahora por población al conjunto de conocimientos. De esta forma, los tránsitos de los conocimientos por los distintos grupos, descritos por las variantes SAS, SAOS o SAOA, se identifican con los modelos matemáticos (13), (18), (22) como:

$$\begin{aligned} SAS &\Leftrightarrow SIS \\ SAOS &\Leftrightarrow SIRS \\ SAOS &\Leftrightarrow SIRI \end{aligned} \quad (II)$$

Seguidamente, se ha construido una representación (numérica) del proceso de enseñanza-aprendizaje. En este, en cada instante de tiempo el estudiante aprende cierta cantidad de conocimientos y olvida otra cantidad de conocimientos. En la simulación del proceso se ha considerado una cantidad máxima de contenidos a incorporar, a aprender o a olvidar. Estas cantidades se definen al inicio del proceso.

El algoritmo mostrado en la tabla 5 es el que se ha utilizado para simular el proceso de aprendizaje para la variante SAS, correspondiente al modelo SIS dado en (13).

<b>Algoritmo 2 Proceso de enseñanza-aprendizaje según modelo SIS</b>	
1. Inicialización	
-	$I_{max}$ = número máximo de contenidos a aprender en un instante de tiempo
-	$R_{max}$ = número máximo de contenidos a olvidar en un instante de tiempo
-	$n_{max}$ = número máximo de contenidos nuevos a añadir como susceptibles
-	$t_{max}$ = número máximo de pasos temporales
-	$D$ = arreglo con conocimientos disponibles
-	$S$ = arreglo con conocimientos susceptibles
-	$I$ = arreglo con conocimientos aprendidos
-	$R$ = arreglo con conocimientos olvidados
2. Escoger un número aleatorio $d < n_{max}$ de elementos de $D$	
3. Incorporar a $S$ los elementos escogidos en 2 cuyas dependencias están en $I$	
4. Escoger un número aleatorio $c < I_{max}$ de elementos de $S$ que pasan a $I$	
5. Escoger un número aleatorio $b < R_{max}$ de elementos de $I$ que pasan a $S$	
6. Volver al paso 2 $t_{max}$ veces	

**Tabla 5:** Algoritmo 2.

La tabla 6 muestra los primeros instantes de un proceso de aprendizaje según la variante SAS asociado a la matriz de conocimientos tabla 4. En el instante inicial la “población de conocimientos”,  $N$ , es 4, de ellos, 2 en el grupo de los susceptibles y 2 en el grupo de los aprendidos. En el instante de tiempo 1 se incorpora el conocimiento 6 al grupo de los susceptibles, pues este tiene sus dependencias satisfechas. El conocimiento 3 pasa al grupo de los aprendidos en este instante de tiempo. Para  $t = 2$  el conocimiento 1, que se había aprendido, es olvidado por el estudiante y pasa al grupo de los susceptibles. Se incorpora a este grupo el conocimiento 5 y se aprende el conocimiento 4. Este proceso continúa mientras se van guardando, en la tabla de la derecha, la cantidad de conocimientos susceptibles y aprendidos en cada instante de tiempo.

$t$	Con. $S$	Con. $I$
0	3,4	1,2
1	4,6	1,2,3
2	1,5,6	2,3,4
3	3,5,6,7,9	1,2,4
4	3,5,7,10	1,2,4,6,9
5	2,5,7	1,3,4,6,9,10
6	2,6,7,8,10	1,3,4,5,9

$t$	$S$	$I$	$N$
0	2	2	4
1	2	3	5
2	3	3	6
3	5	3	8
4	4	5	9
5	3	6	9
6	5	5	10

**Tabla 6:** Ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje según la variante SAS.

La simulación del proceso de aprendizaje según la variante SAOS es un poco más compleja puesto que hay que tener en cuenta otros detalles: como se explica anteriormente, en esta variante se consideran los conocimientos

olvidados, los cuales pueden permanecer en este grupo hasta tanto estén satisfechas las dependencias para regresar al grupo de los susceptibles. El proceso de aprendizaje en este caso se muestra en la tabla 7.

<b>Algoritmo 3 Proceso de enseñanza-aprendizaje según modelo SIRS</b>	
1. Inicialización	
-	$I_{max}$ = número máximo de contenidos a aprender en un instante de tiempo
-	$R_{max}$ = número máximo de contenidos a olvidar en un instante de tiempo
-	$n_{max}$ = número máximo de contenidos nuevos a añadir como susceptibles
-	$t_{max}$ = número máximo de pasos temporales
-	$D$ = arreglo con conocimientos disponibles
-	$S$ = arreglo con conocimientos susceptibles
-	$I$ = arreglo con conocimientos aprendidos
-	$R$ = arreglo con conocimientos olvidados
2. Escoger un número aleatorio $d < n_{max}$ de elementos de $D$	
3. Incorporar a $S$ los elementos escogidos en 2 cuyas dependencias estén en $I$	
4. Escoger un número aleatorio $c < I_{max}$ de elementos de $S$ que pasan a $I$	
5. Escoger un número aleatorio $r < R_{max}$ de elementos de $I$ que pasan a $R$	
6. Escoger un número aleatorio $b < R_{max}$ de elementos de $R$ que pasan a $S$	
7. Volver al paso 2 $t_{max}$ veces	

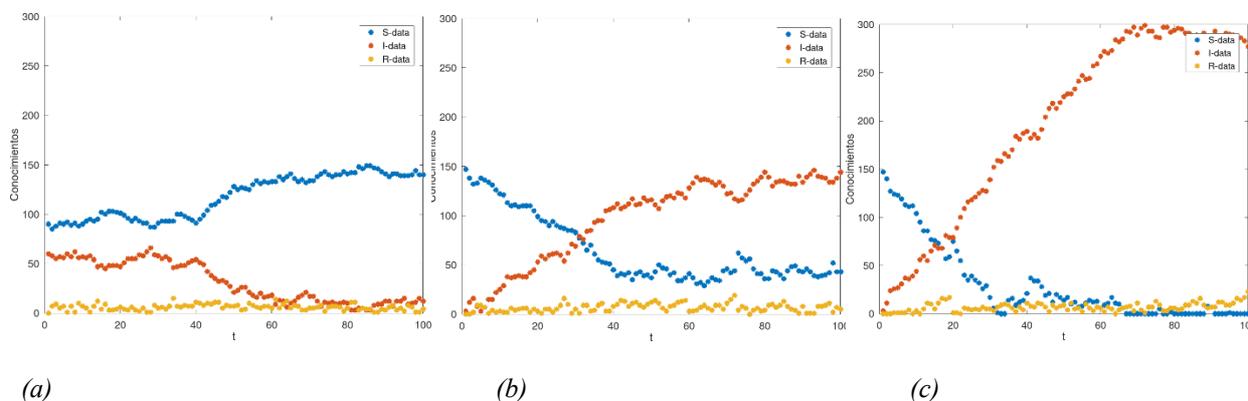
**Tabla 7:** Algoritmo 3.

La tabla 8 propone un ejemplo del proceso de enseñanza-aprendizaje generado a partir de la matriz de conocimientos mostrada en la tabla 4. A diferencia del ejemplo de la tabla 6, en esta se incorporan conocimientos al grupo de olvidados ( $R$ ) en lugar de pasar directamente a los conocimientos susceptibles. Esta diferencia se aprecia a partir de  $t = 3$ , donde se olvida el conocimiento 1 y queda retenido en el grupo de los olvidados hasta  $t = 5$ . En el paso  $t = 3$  se olvida el conocimiento 3 pero vuelve al grupo de los susceptibles en el siguiente paso. Este proceso podrá simularse con el sistema de ecuaciones diferenciales (18); en la figura 11 se muestran los resultados de la simulación, para valores fijos de  $R_{max} = 5$ ,  $n_{max} = 20$  y, en las figuras 11(a), 11(b) y 11(c) se varía el valor de  $I_{max}$  a 5, 10 y 15 respectivamente.

$t$	Con. $S$	Con. $I$	Con. $R$
0	3,4	1,2	0
1	4,6	1,2,3	0
2	5,6	2,3,4	1
3	5,6,7,9	2,4	1,3
4	3,5,7,10	4,6,9	1,2
5	1,5,7	3,4,6,10	2,9
6	1,2,8,7	3,4,5,6,10	9

$t$	$S$	$I$	$R$	$N$
0	2	2	0	4
1	2	3	0	5
2	2	3	1	6
3	4	2	2	8
4	4	3	2	9
5	3	4	2	9
6	4	5	1	10

**Tabla 8:** Ejemplo de un proceso de enseñanza-aprendizaje según la variante SAOS correspondiente al modelo SIRS.



**Figura 11:** Resultados de la simulación un proceso de enseñanza-aprendizaje según la variante SAOS correspondiente al modelo SIRS.

Estos procesos de aprendizaje son los ilustrados en la figura 3, pero a mayor escala. Se han simulado los procesos con una matriz de 300 conocimientos, variando la cantidad máxima de conocimientos aprendidos,  $I_{max}$  en cada instante de tiempo mientras que se mantuvieron constantes la cantidad máxima de conocimientos olvidados en  $R_{max} = 10$  y la cantidad máxima de conocimientos incorporados a los susceptibles  $n_{max} = 20$ . En

la primera columna de imágenes se toma  $I_{max} = 5$ , en la segunda columna  $I_{max} = 10$  e  $I_{max} = 15$  en la tercera. Vale señalar que, en el caso en el que  $I_{max} \ll R_{max}$  el número de conocimientos aprendidos tiende a 0, en concordancia con los análisis de estabilidad para los dos modelos mostrados anteriormente. El aumento del valor de  $I_{max}$  en las columnas 2 y 3 deviene en un incremento de la tasa de crecimiento en los conocimientos aprendidos. Nótese además que, cuando la cantidad de conocimientos a aprender por instante de tiempo es suficientemente grande, apenas existe diferencia entre las variantes de aprendizaje utilizadas. Esto nos dice que la diferencia en el proceso de aprendizaje se aprecia cuando existe más similitud entre la cantidad de conocimientos aprendidos y olvidados.

## 7. CONCLUSIONES

La concepción de un modelo matemático aplicado a la descripción del proceso de enseñanza-aprendizaje, constituyó el centro de atención de esta investigación. En este trabajo se han hecho tres propuestas de modelos de ecuaciones diferenciales para simular el proceso de enseñanza-aprendizaje de una persona, estos han surgido como variaciones del modelo SIR. Las modificaciones realizadas consistieron en la incorporación de una tasa de crecimiento proporcional al grupo I en la ecuación de S y la incorporación al grupo I (en lugar de a S) de la proporción de elementos que abandonan el grupo R. Con esto, se refleja nuevamente la adaptabilidad del modelo SIR para la descripción de distintas dinámicas, incluso, fuera del campo de las epidemias. Se ha considerado una tasa de crecimiento proporcional al número de infectados la cual parece simular de forma apropiada el proceso de la incorporación de contenidos a medida que se va desarrollando el proceso de enseñanza-aprendizaje. A partir del análisis de estabilidad de las tres variantes, el modelo SIR es el que mejor describe la dinámica del proceso de aprendizaje, puesto que su punto estacionario tiene un comportamiento inestable, con lo cual, siempre habrá una tendencia a aumentar el número de conocimientos aprendidos. Durante el proceso de simulación se ha constatado que, la diferencia entre las variantes simuladas del proceso de aprendizaje se aprecia cuando existe más similitud entre la cantidad de conocimientos aprendidos y olvidados: aunque las variantes SAS y SAOS mantienen un comportamiento similar.

**RECEIVED: JUNE, 2022.**  
**REVISED: NOVEMBER, 2023.**

## REFERENCIAS

- [1] ABELLÓ-UGALDE, I. A., GUINOVART-DÍAZ, R., and MORALES-LEZCA, W. (2020): El modelo SIR básico y políticas antiepidémicas para la COVID en Cuba. **Revista Cubana De Salud Pública**, 46, 1–24.
- [2] ADAMU, H. A., MUHAMMAD, M., JINGI, A. M., and USMAN, M. A. (2019): Mathematical modelling using improved SIR model with more realistic assumptions. **International Journal of Engineering and Applied Sciences (IJEAS)**, 6, 2394–3661.
- [3] AIKENHEAD, G. S. (1973): The measurement of high school students' knowledge about science and scientists. **Science Education**, 57, 539–549.
- [4] BORDOGNA, C. M. and ALBANO, E. V. (2001): Theoretical description of teaching-learning processes: A multidisciplinary approach. **Physical Review Letters**, 87, 118701–1–118701–4.
- [5] ELSGOLTZ, L. (1969): **Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional**. Moscú: editorial Mir.
- [6] GRIMES, M. W. (2015): Teaching leadership through a Cultural-Psychological Lens. **Journal of Leadership Studies**, 9(1), 63–72.
- [7] HARKO, T., LOBO, F. S., and MAK, M. K. (2014): Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. **Applied Mathematics and Computation**, 236, 184–194.
- [8] HOLYST, J. A., KACPERKI, K., and SCHWITZER, F. (2000): Phase transitions in social impact models of opinion formation. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 285, 199–210.
- [9] KAHN, H. E. and AGNEW, M. (2017): Global Learning Through Difference: Considerations for Teaching, Learning, and the Internationalization of Higher Education. **Journal of Studies in International Education**, 21, 52–64.
- [10] KERMACK, W. O. and MCKENDRICK, A. G. (1927): Contributions to the mathematical theory of epidemics, part III. **Proc Roy Soc London**, 115, 700–721.
- [11] KERSTING, N. B., GIVVIN, K. B., THOMPSON, B. J., SANTAGATA, R., and STIGLER, J. W. (2012): Measuring Usable Knowledge: Teachers' Analyses of Mathematics Classroom Videos Predict Teaching Quality and Student Learning. **American Educational Research Journal**, 49, 568–589.
- [12] LI, M. (2018): **An Introduction to Mathematical Modeling of Infectious Diseases**. Vol 2. Chapter 2. Springer, Berlin.
- [13] MARTCHEVA, M. (2015): **An Introduction to Mathematical Epidemiology**. Springer New York.
- [14] MIAO, A., ZHANG, T., ZHANG, J., and WANG, C. (2018): Dynamics of a stochastic sir model with both horizontal and vertical transmission. **Journal of Applied Analysis and Computation**, 8, 1108–1121.

- [15] VARGAS, H. E. S., SÁNCHEZ, L. B. R., LLANES, P. Á. G., and RODRÍGUEZ, A. S. (2020): Modelación físico-matemática para la toma de decisiones frente a la COVID-19 en Cuba. **Retos de la Dirección**, 14, 54– 85.
- [16] VIGOTSKY, L. S. (1991): **Obras escogidas** (1982-1984). Visor, Madrid.