

# SOLUCION NUMÉRICA DE UNA EDP PARABÓLICA SOBRE UN TRIÁNGULO ISÓSCELES USANDO EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Wilfredo Angulo<sup>\*1</sup>, Juan Carlos Osorio<sup>\*\*</sup>, Albert Espinal<sup>\*\*\*</sup>

\*Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.

\*\*Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Sede Quito, Ecuador, Avenida 12 de octubre 1076 y Roca, Apartado Postal 17-01-2184, Quito, Ecuador.

\*\*\*Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación, Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.

## ABSTRACT

In this work we present the numerical resolution of an initial and boundary value problem associated to one non-homogeneous parabolic EDP over a 2D domain with an isosceles triangle shape, using the explicit finite difference method (FDM) on a uniform mesh. The proposed numerical scheme combines a nine points stencil to approximate the solution in the nodes not adjacent to the boundary represented by the hypotenuse, and another one of eight points to approximate the solution in those that are adjacent to such boundary. By a standard analysis of FDM's it is demonstrated that the numerical scheme is stable, and this result is corroborated with numerical experiments.

**KEYWORDS:** Finite differences, stability, numerical experiments.

**MSC:** 35J05

## RESUMEN

En este trabajo presentamos la solución numérica de un problema de valor inicial y de frontera asociado a una EDP parabólica no homogénea sobre un dominio 2D con forma de triángulo isósceles, empleando el método de diferencias finitas (MDF) explícito en una malla uniforme. El esquema numérico propuesto combina un estencil de nueve puntos para aproximar la solución en los nodos adyacentes a la frontera representada por la hipotenusa, y otro de ocho puntos para aproximar la solución en aquellos nodos que son adyacentes a tal frontera. Por un análisis estándar de MDF's se demuestra que el esquema numérico es estable, y este resultado es corroborado con experimentos numéricos.

**PALABRAS CLAVE:** Diferencias finitas, estabilidad, experimentos numéricos.

## 1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo tiene la finalidad de aplicar el método de diferencias finitas (denotado en lo sucesivo por MDF) para la resolución numérica de un problema de valor inicial y de frontera de la EDP parabólica no homogénea:

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = f \quad (1.1)$$

sobre un dominio bidimensional  $\Omega$ , de frontera denotada por  $\partial\Omega$ , con la forma de triángulo isósceles y coordenadas arbitrarias en el plano cartesiano  $(x, y)$  para sus vértices, donde el Laplaciano  $\Delta U$  es definido de manera estándar por:

$$\Delta U := \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

<sup>1</sup> wilfredo@espol.edu.ec, wilfredoangulo@yahoo.es

Para realizar una implementación computacional del MDF de manera sistemática, se propone una transformación lineal de coordenadas que convierte al triángulo  $\Omega \cup \partial\Omega$  dado en el plano  $(x, y)$  a otro equivalente en el plano  $(\hat{x}, \hat{y})$ , denotado  $\hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$  y sobre el cual la EDP equivalente es:

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} - \hat{\Delta} \hat{U} = \hat{f}, \quad (1.2)$$

en donde  $\hat{U}$  y  $\hat{f}$  representan a  $U$  y  $f$ , respectivamente, en las coordenadas  $(\hat{x}, \hat{y})$  y el  $\hat{\Delta} \hat{U}$  se define de la siguiente manera:

$$\hat{\Delta} \hat{U} = 2 \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{x}^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2}.$$

Debido a la forma particular de este dominio, el MDF tradicional basado en diferencias centradas espaciales que se aplica sobre dominios bidimensionales cuadrados o rectangulares, para aproximar el término  $\hat{\Delta} \hat{U}$ , no puede ser aplicado con un estencil de 9 puntos en los nodos interiores que son adyacentes a la frontera del triángulo y que coincide con su hipotenusa. Esto se debe a que uno de los nueve nodos del estencil queda fuera del dominio y la información que se requiere sobre tal nodo para el cómputo numérico de la derivada cruzada sobre dicho nodo no existe.

Por lo anterior, en este trabajo se sigue la idea propuesta por Li y Tang (1996) en [5] para aproximar la solución exacta del problema de valor inicial y de frontera de la EDP parabólica no homogénea (1.2) mediante la formulación de dos esquemas numéricos explícitos en diferencias finitas de orden dos con respecto al paso de discretización  $h > 0$  y otro de orden uno con respecto al paso de discretización temporal  $\Delta t > 0$ . Respecto a los esquemas para la discretización espacial, uno fue diseñado en base a un estencil a 9 puntos para los nodos internos que están alejados de aquellos que conforman la hipotenusa del triángulo y otro basado en un estencil a 8 puntos para los nodos internos de la región computacional que son adyacentes a los nodos de la frontera definida por la hipotenusa del triángulo. La estabilidad del algoritmo resultante con estos esquemas numéricos se determina estableciendo el mayor rango dentro del cual el parámetro  $\beta := \Delta t/h^2$  garantiza la convergencia de los dos esquemas en diferencia finita; empleando el análisis de estabilidad estándar para MDF's [7].

La implementación del algoritmo numérico asociado a la combinación de los esquemas en diferencias finitas con dos estencils fue llevada a cabo definiendo dos subconjuntos de nodos internos para los cuales cada esquema es válido. Un problema de valor inicial y de frontera de la EDP parabólica no homogénea (1.2) con solución exacta particular fue diseñado para probar el desempeño del método numérico en cuanto a estabilidad y convergencia, y se puso en evidencia que el método numérico basado en el MDF y los dos estencils es estable tomando los pasos  $\Delta t$  y  $h$  tales que  $\beta$  estuviera en el rango establecido teóricamente.

Para el buen entendimiento de este trabajo, el mismo fue organizado de la manera siguiente: en la sección 2 se describe el modelo matemático cuya solución fue aproximada mediante el método de diferencias finitas. La sección 3 fue dedicada al proceso de transformación geométrica y la reformulación del problema en uno equivalente bajo esta transformación. En la sección 4 se deduce el método numérico en diferencias finitas para aproximar la solución del problema planteado sobre el triángulo isósceles, además se enuncia un resultado de estabilidad numérica basado en el análisis estándar de los MDF's. Finalmente, en la sección 5 se verifica el resultado teórico de estabilidad del método numérico y su desempeño con respecto a la exactitud, y en la sección 6 se exponen las conclusiones obtenidas en el trabajo.

## 2. EL MODELO COMPLETO

Sea el triángulo rectángulo de vértices  $P_1 = (0,0)$ ,  $P_2 = (1,0)$  y  $P_3 = (1,1)$  cuya hipotenusa es el segmento de recta que une los puntos  $P_1$  y  $P_3$ . Este triángulo representa un dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que en lo sucesivo se define como el siguiente conjunto:

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x\}.$$

Por otro lado, la frontera  $\partial\Omega$  viene descrita por  $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , en donde

$$\Gamma_1 = \{(x, 0); \quad 0 \leq x \leq 1\}, \quad \Gamma_2 = \{(1, y); \quad 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{y} \quad \Gamma_3 = \{(x, x); \quad 0 \leq x \leq 1\}.$$

Con la definición de estos conjuntos y considerando  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  un intervalo para la variable temporal  $t$ , el modelo matemático consiste en encontrar una función  $U(x, y, t)$  tal que:

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, y, t) - \Delta U(x, y, t) = f(x, y, t); \quad (x, y) \in \Omega, t \in (0, T],$$

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) &= U_0(x, y); \quad \forall (x, y) \in \Omega, \\ U(x, y, t)|_{\Gamma_2} &= U_2(1, y, t); \quad \forall y \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T], \\ U(x, y, t)|_{\Gamma_3} &= U_3(x, 0, t); \quad \forall x \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

En este modelo, como es usual,  $\Delta U$  representa el Laplaciano de la función en  $2D$  definido por

$$\Delta U := \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Por otro lado  $f, U_0, U_1, U_2$  y  $U_3$  son funciones dadas.

### 3. TRANSFORMACIÓN GEOMÉTRICA Y REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Con la finalidad de emplear el método de diferencias finitas restringido al dominio bidimensional en la forma de un triángulo como lo presentan Li y Tan en [5], se introduce una transformación geométrica que a cada punto  $(x, y) \in \Omega \cup \partial\Omega$  le asigna el punto  $(\hat{x}, \hat{y})$  en el triángulo  $\hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$  de vértices  $\hat{P}_1 = (0, 0)$ ,  $\hat{P}_2 = (1, 0)$  y  $\hat{P}_3 = (0, 1)$ . Es decir, sobre el triángulo en el plano de coordenadas  $\hat{x}\hat{y}$  que se define como el siguiente conjunto:

$$\hat{\Omega} := \{(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2; \quad 0 < \hat{x} < 1, \quad 0 < \hat{y} < \hat{x}\},$$

cuya frontera  $\partial\hat{\Omega}$  viene descrita por  $\partial\hat{\Omega} = \hat{\Gamma}_1 \cup \hat{\Gamma}_2 \cup \hat{\Gamma}_3$ , con

$$\hat{\Gamma}_1 = \{(\hat{x}, 0); \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1\}, \quad \hat{\Gamma}_2 = \{(\hat{x}, 1 - \hat{x}); \quad 0 \leq \hat{x} \leq 1\} \quad \text{y} \quad \hat{\Gamma}_3 = \{(0, \hat{y}); \quad 0 \leq \hat{y} \leq 1\}.$$

La transformación del triángulo  $\Omega \cup \partial\Omega$  al triángulo  $\hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$  se define por medio de la inversa de la aplicación

$$\mathcal{F}: \hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega} \rightarrow \Omega \cup \partial\Omega$$

tal que

$$x(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} + \hat{y}, \quad y(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}.$$

Ya que dicha transformación es lineal, entonces su inversa es la aplicación

$$\mathcal{F}^{-1}: \Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$$

tal que

$$\hat{x}(x, y) = x - y, \quad \hat{y}(x, y) = y.$$

Si se tiene en cuenta que toda función  $v$  definida sobre el triángulo  $\Omega \cup \partial\Omega$  es de la forma  $v = v(x, y)$  entonces bajo la transformación  $(\hat{x}, \hat{y}) \mapsto \mathcal{F}(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)$  se tendrá que

$$v(x, y) = v \circ \mathcal{F}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{v}(\hat{x}, \hat{y}).$$

Esto indica que de esta manera se obtiene la función  $\hat{v}$  definida sobre el triángulo  $\hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$ . En este mismo orden de ideas se puede probar que el Laplaciano de  $\hat{v}$  queda expresado como:

$$\hat{\Delta}\hat{v} = 2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x}^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial \hat{y}^2}.$$

Ahora, el problema formulado sobre el triángulo  $\hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$  y todo tiempo  $t \in [0, T]$  consistirá en: encontrar una función  $\hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, t)$  tal que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{U}}{\partial t}(\hat{x}, \hat{y}, t) - \hat{\Delta}\hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, t) &= \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}, t); \quad (\hat{x}, \hat{y}) \in \hat{\Omega}, \quad t \in (0, T], \\ \hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, 0) &= \hat{U}_0(\hat{x}, \hat{y}); \quad \forall (x, y) \in \hat{\Omega}, \\ \hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, t)|_{\hat{\Gamma}_1} &= \hat{U}_1(\hat{x}, 0, t); \quad \forall \hat{x} \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T], \\ \hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, t)|_{\hat{\Gamma}_2} &= \hat{U}_2(\hat{x}, 1 - \hat{x}, t); \quad \forall \hat{x} \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T], \\ \hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, t)|_{\hat{\Gamma}_3} &= \hat{U}_3(0, \hat{y}, t); \quad \forall \hat{y} \in [0, 1], \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

## 4. MÉTODO NUMÉRICO

### 4.1. Discretización del dominio y los operadores diferenciales

En primer lugar, se cubre el dominio triangular  $\hat{\Omega}$  usando una malla uniforme con un paso  $h := 1/N$  tanto para el eje  $\hat{x}$  como para el eje  $\hat{y}$ ; siendo  $N$  un número entero positivo dado. En lo sucesivo los puntos de la malla se denotan por  $(i, j)$  con  $i, j = 1, 2, \dots, N + 1$  (ver (a) en la Figura 1), y al usar un estencil centrado en  $(\hat{x}, \hat{y})$  a 9-puntos:  $(\hat{x}, \hat{y})$ ,  $(\hat{x} + h, \hat{y})$ ,  $(\hat{x}, \hat{y} + h)$ ,  $(\hat{x} - h, \hat{y})$ ,  $(\hat{x}, \hat{y} - h)$ ,  $(\hat{x} + h, \hat{y} + h)$ ,  $(\hat{x} - h, \hat{y} + h)$ ,  $(\hat{x} - h, \hat{y} - h)$  y  $(\hat{x} + h, \hat{y} - h)$ , los mismos serán denotados por los números: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, respectivamente (ver (b) en la Figura 1). El esquema numérico se construye en la región computacional definida por el siguiente conjunto:

$$\overset{\circ}{\Delta} = \{(i, j); 2 \leq j \leq N - 1, 2 \leq i \leq N - j + 1\}.$$

En (a) de la Figura 1, se ilustran los puntos de  $\overset{\circ}{\Delta}$  que no son adyacentes a la frontera del dominio marcándolos con la equis y los que son adyacentes a la frontera del dominio se marcan con un rectángulo.

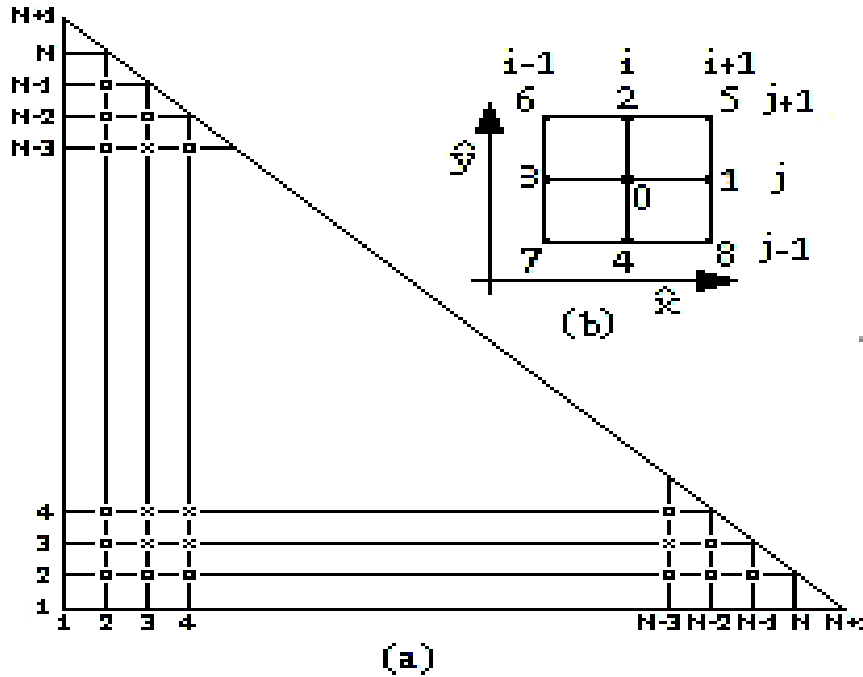


Figura 1: Dominio computacional: discretización de  $\hat{\Omega} \cup \partial\hat{\Omega}$ .

Adicionalmente la frontera de la región computacional se denota por  $\partial \overset{\circ}{\Delta}$  y define como

$$\partial \overset{\circ}{\Delta} = \partial \overset{\circ}{\Delta}_1 \cup \partial \overset{\circ}{\Delta}_2 \cup \partial \overset{\circ}{\Delta}_3$$

en donde  $\partial \overset{\circ}{\Delta}_1$ ,  $\partial \overset{\circ}{\Delta}_2$  y  $\partial \overset{\circ}{\Delta}_3$  son los siguientes conjuntos

$$\partial \overset{\circ}{\Delta}_1 = \{(i, j); 1 \leq i \leq N + 1, j = 1\}$$

$$\partial \overset{\circ}{\Delta}_2 = \{(i, j); i = j, 1 \leq j \leq N + 1\}$$

$$\partial \overset{\circ}{\Delta}_3 = \{(i, j); 1 \leq j \leq N + 1, i = 1\}$$

Los esquemas numéricos para discretizar los operadores diferenciales se obtienen mediante fórmulas de diferencias finitas centradas, de segundo orden respecto a  $h$ , en el estencil de 9 puntos. Para una función  $[0, T] \ni t \mapsto \widehat{U}(t)$ , estas fórmulas vienen dadas por:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \widehat{x}^2} &= \frac{\widehat{U}_1 + \widehat{U}_3 - 2\widehat{U}_0}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \widehat{y}^2} &= \frac{\widehat{U}_2 + \widehat{U}_4 - 2\widehat{U}_0}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\ \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \widehat{x} \partial \widehat{y}} &= \frac{\widehat{U}_5 - \widehat{U}_6 + \widehat{U}_7 - \widehat{U}_8}{4h^2} + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Debe tenerse especial cuidado en los puntos de la malla que están más cercanos a la hipotenusa del triángulo  $\widehat{\Omega} \cup \partial \widehat{\Omega}$  debido a que falta el punto 5 (está fuera de la región de interés). Por esta razón, es necesario emplear una fórmula de diferencias para discretizar la derivada cruzada  $\partial^2 \widehat{U} / \partial \widehat{x} \partial \widehat{y}$  empleando ahora un estencil de 8 puntos. El esquema de aproximación por diferencias finitas en este tipo de estencil no simétrico se encuentra documentado muy bien en la literatura sobre el método de diferencias finitas; ver por ejemplo [1] y [4]. En tal sentido, lo que se hace es tomar

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \widehat{x} \partial \widehat{y}} = \sum_{i=0}^8 c_i \widehat{U}_i + \mathcal{O}(h^2)\tag{4.2}$$

y realizar una expansión en serie de Taylor entorno al punto central 0 del estencil sobre cada término en la sumatoria hasta un orden  $\mathcal{O}(h^4)$ . A continuación, se igualan los coeficientes correspondientes a cada lado para todas las derivadas parciales. Esto proporcionará un sistema lineal de nueve ecuaciones con nueve incógnitas. Tomando  $c_5 = 0$ , se obtiene

$$c_0 = -\frac{1}{h^2}, \quad c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = \frac{1}{2h^2} c_5 = c_6 = 0, \quad c_7 = c_8 = -\frac{1}{2h^2}$$

lo cual proporciona el siguiente esquema:

$$\frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \widehat{x} \partial \widehat{y}} = \frac{\widehat{U}_1 + \widehat{U}_2 + \widehat{U}_3 + \widehat{U}_4 - 2\widehat{U}_0 - \widehat{U}_6 - \widehat{U}_8}{2h^2} + \mathcal{O}(h^2).\tag{4.3}$$

Finalmente, para un paso de discretización  $\Delta t > 0$ , sea  $t_m = m\Delta t$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, M$ , una sucesión de nodos que discretizan del intervalo  $[0, T]$  en subintervalos  $I_m = [t_m, t_{m+1}]$ ; siendo  $M$  el máximo entero tal que  $t_M \leq T$ . Si se denota por  $\widehat{U}_0^m$  la aproximación de la función  $\widehat{U}(\widehat{x}, \widehat{y}, t)$  en el punto  $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j, t_m)$  del espacio-tiempo computacional, entonces el operador derivada parcial respecto del tiempo de la función  $\widehat{U}$  se puede aproximar usando un esquema de diferencias finitas de orden uno con respecto a  $\Delta t$ . Con esto, se tiene que:

$$\frac{\partial \widehat{U}}{\partial t}(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j, t_m) = \frac{\widehat{U}_0^{m+1} - \widehat{U}_0^m}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t).\tag{4.4}$$

#### 4.2. Discretización del modelo usando los operadores en diferencias finitas

Para encontrar las ecuaciones en diferencias finitas que representan la discretización completa del problema (3.1), se restringen a  $t_m$  los esquemas en diferencias centradas a 9 y 8 puntos dados en (4.1) y (4.3) y luego se sustituyen junto con el esquema (4.4) en la ecuación de derivadas parciales. La función lado derecho  $\widehat{f}$  simplemente se evalúa en el punto computacional  $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j, t_m)$  para los  $(i, j) \in \Delta$  y todo  $0 \leq m \leq M$ . Posteriormente, la función que representa la condición inicial se evalúa en los puntos computacionales  $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j, 0)$  para todo  $(i, j) \in \Delta$ , y las que representan a las condiciones de fronteras, o trazas de la función  $\widehat{U}$ , se evalúan directamente sobre los puntos computacionales  $(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j, t_m)$  para los cuales  $(i, j) \in \partial \Delta$  y  $0 \leq m \leq M$ .

#### 4.2.1. Ecuaciones en diferencias finitas para los puntos interiores

Teniendo en cuenta que la restricción a  $t_m$  de los esquemas en diferencias centradas a 9 y 8 puntos dados en (4.1) y (4.3) queda expresada como

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{x}^2} \right|_{t_m} &= \frac{\hat{U}_1^m + \hat{U}_3^m - 2\hat{U}_0^m}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\
 \left. \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{y}^2} \right|_{t_m} &= \frac{\hat{U}_2^m + \hat{U}_4^m - 2\hat{U}_0^m}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\
 \left. \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right|_{t_m} &= \frac{\hat{U}_5^m - \hat{U}_6^m + \hat{U}_7^m - \hat{U}_8^m}{4h^2} + \mathcal{O}(h^2), \\
 \left. \frac{\partial^2 \hat{U}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right|_{t_m} &= \frac{\hat{U}_1^m + \hat{U}_2^m + \hat{U}_3^m + \hat{U}_4^m - 2\hat{U}_0^m - \hat{U}_6^m - \hat{U}_8^m}{2h^2} + \mathcal{O}(h^2),
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

entonces la sustitución de estos esquemas junto con el esquema (4.4) en la EDP del problema (3.1) proporciona la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \frac{\hat{U}_0^{m+1} - \hat{U}_0^m}{\Delta t} &= 2 \left( \frac{\hat{U}_1^m + \hat{U}_3^m - 2\hat{U}_0^m}{h^2} \right) - 2 \left( \frac{\hat{U}_5^m - \hat{U}_6^m + \hat{U}_7^m - \hat{U}_8^m}{4h^2} \right) \\
 &\quad + \left( \frac{\hat{U}_2^m + \hat{U}_4^m - 2\hat{U}_0^m}{h^2} \right) + \hat{f}_0^{m-1} + \mathcal{O}(h^2) + \mathcal{O}(\Delta t)
 \end{aligned}$$

También se debe tener en cuenta que los nodos interiores de la región computacional  $\Delta$  que se emplean son los que vienen dados en el siguiente subconjunto:

$$\Delta^* = \{(i, j); 2 \leq j \leq N-3, 2 \leq i \leq (N-j)-1\} \subset \Delta$$

Ahora, suprimiendo los términos  $\mathcal{O}(h^2)$  y  $\mathcal{O}(\Delta t)$ , reorganizando los términos con el super-índice  $m$  del lado derecho, se obtiene el siguiente esquema en diferencias finitas FTCS (*Forward Time Centred Space*): Dado el dato inicial  $\hat{U}_{i,j}^0$  y la función lado derecho  $\hat{f}_{i,j}^0$  en cada  $(i, j) \in \Delta$ , encontrar  $\hat{U}_{i,j}^m$ , para cada  $m = 1, 2, \dots, M$ , y en cada  $(i, j) \in \Delta^*$ , mediante la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
 \hat{U}_{i,j}^{m+1} &= \beta(2\hat{U}_{i+1,j}^m + 2\hat{U}_{i-1,j}^m + \hat{U}_{i,j+1}^m + \hat{U}_{i,j-1}^m) - \frac{\beta}{2}(\hat{U}_{i+1,j+1}^m - \hat{U}_{i-1,j+1}^m + \hat{U}_{i-1,j-1}^m - \hat{U}_{i+1,j-1}^m) \\
 &\quad + (1 - 6\beta)\hat{U}_{i,j}^m + \Delta t \hat{f}_{i,j}^m,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

donde  $\beta := \Delta t/h^2$ . Sin embargo, de manera alternante en el algoritmo, este esquema debe cambiarse por uno que se genera usando la expresión (4.3) para aproximar la derivada cruzada en todos aquellos puntos  $(i, j) \in \Delta$  cercanos a la frontera computacional que corresponde a la hipotenusa del triángulo. Es decir, para los puntos  $(i, j) \in \Delta$  tales que  $3 \leq j \leq N-3$  e  $i = N-j$ , donde los valores de  $\hat{U}_{i+1,j+1}^m$  no están disponibles para el cálculo debido a que el punto  $(\hat{x}_{i+1}, \hat{y}_{j+1}, t_m)$  que le corresponde se encuentra fuera de la malla. En este sentido, el esquema FTCS a emplear para el conjunto

$$\Delta^{**} = \{(i, j); 2 \leq j \leq N-2, i = N-j\} \subset \Delta$$

es el siguiente: Dado el dato inicial  $\hat{U}_{i,j}^0$  y la función lado derecho  $\hat{f}_{i,j}^0$  en cada  $(i, j) \in \Delta$ , encontrar  $\hat{U}_{i,j}^m$ , para cada  $m = 1, 2, \dots, M$ , y en cada  $(i, j) \in \Delta^{**}$ , mediante la ecuación en diferencias:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^{m+1} &= \beta(2U_{i+1,j}^m + 2U_{i-1,j}^m + U_{i,j+1}^m + U_{i,j-1}^m) \\
 &\quad - \beta(U_{i+1,j}^m + U_{i,j+1}^m + U_{i-1,j}^m + U_{i,j-1}^m - U_{i-1,j+1}^m - U_{i+1,j-1}^m) + (1 - 4\beta)U_{i,j}^m \\
 &\quad + \Delta t f_{i,j}^m.
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

### 4.3. Estabilidad de los esquemas numéricos

Es este apartado se presenta el resultado de estabilidad para los esquemas (4.6) y (4.7) sin reportar los detalles su prueba rigurosa por ser un procedimiento de cálculo estándar, sin embargo se señalan las referencias que se han seguido para tal propósito. El resultado muestra el rango donde debe tomarse el parámetro  $\beta$  para que los esquemas numéricos (4.6) y (4.7) sean estables en cada paso del tiempo  $\Delta t = \beta h^2$ , dando cualquier valor de  $h > 0$ , y su enunciado es el siguiente.

**TEOREMA 1** (Estabilidad numérica). *Los esquemas (4.6) y (4.7) son numéricamente estables para cualquier  $\beta$  satisfaciendo:*

$$\frac{1}{48} \leq \beta \leq \frac{5}{48} \quad (4.8)$$

**Demostración:**

La demostración de este teorema se llevó a cabo teniendo en cuenta que la condición necesaria y suficiente para que los esquemas (4.6) y (4.7) sean estables es que  $\beta \leq 1/2$ . Los fundamentos teóricos y detalles de este tipo de análisis han sido reportados en la literatura clásica de análisis numérico (ver por ejemplo [2] y [8]), literatura especializada en métodos numéricos para ecuaciones en derivadas parciales (ver [6]) o en los trabajos similares que se ha seguido en éste; tales como: el de Birkhoff y Lynch (1990) en [1], el de Hindmarsh *et al* [3], el de Varah (1980) en [9] y el de Wesseling (1996) en [10].

## 5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan los resultados obtenidos por la implementación de los esquemas tipo FTCS (4.6) y (4.7) y se corrobora el resultado de estabilidad mediante simulaciones numéricas. En tal sentido, la función lado derecho  $\hat{f}$  que se considera es

$$\begin{aligned} \hat{f}(\hat{x}, \hat{y}, t) &= ((\hat{x} + \hat{y} - 1)[(48\pi^2 - 1)\text{sen}[4\pi(\hat{x} - \hat{y})] + (32\pi^2 - 1)\text{sen}[4\pi(1 - \hat{x})] \\ &+ (16\pi^2 - 1)\text{sen}(4\pi\hat{y})] + 8[\cos[4\pi(1 - \hat{x})] - \cos[4\pi(\hat{x} - \hat{y})]]). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Las funciones condición inicial  $\hat{U}_0$  y las de frontera  $\hat{U}_1$ ,  $\hat{U}_2$  y  $\hat{U}_3$ , son tomadas, respectivamente, como:

$$\hat{U}_0(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x} + \hat{y} - 1)(\text{sen}[4\pi(\hat{x} - \hat{y})] + \text{sen}[4\pi(1 - \hat{x})] + \text{sen}(4\pi\hat{y})), \quad (5.2)$$

$$\hat{U}_1(\hat{x}, 0, t) = \hat{U}_2(\hat{x}, 1 - \hat{x}, t) = \hat{U}_3(0, \hat{y}, t) = 0. \quad (5.3)$$

La solución exacta del problema (3.1) con estos datos es

$$\hat{U}(\hat{x}, \hat{y}, t) = (\hat{x} + \hat{y} - 1)(\text{sen}[4\pi(\hat{x} - \hat{y})] + \text{sen}[4\pi(1 - \hat{x})] + \text{sen}(4\pi\hat{y}))e^{-t}. \quad (5.4)$$

Para probar el desempeño de los esquemas numéricos en cuanto la estabilidad, se considera una cantidad de puntos  $N$  para discretizar los intervalos correspondientes a las variables espaciales  $(\hat{x}, \hat{y})$  y otra cantidad de puntos  $M$  para discretizar la variable temporal  $t$ . Con esta información, un valor del parámetro  $h$  y las funciones de la (5.1) a la (5.4) como entradas, se codificaron los esquemas (4.6) y (4.7) en lenguaje MATLAB 2016 para aprovechar las herramientas de elaboración de gráficos que dicho software posee. El hardware utilizado fue un procesador I7 Intel de cuarta generación de 3.40 GHz, 8 Gb RAM en una plataforma Windows 10.

Posteriormente los ensayos numéricos se llevan a cabo tomando tres valores del parámetro  $\beta$  dentro y fuera del intervalo  $[1/48, 5/48]$ ; para cada uno de los cuales se determina el paso del tiempo de la forma  $\Delta t = \beta h^2$ . De manera específica, los valores de  $\beta$  usados son:

$$\beta = 1/60, \quad \beta = 1/48, \quad \beta = 5/48, \quad \beta = 1/8 \quad \text{y} \quad \beta = 1/2$$

que  $\beta = 1/60$  está fuera del intervalo  $[1/48, 5/48]$  y por debajo del valor inferior permitido para la estabilidad de los esquemas numéricos. Por otro lado, los valores  $\beta = 1/8$  y  $\beta = 1/2$  están fuera del intervalo  $[1/48, 5/48]$  y por encima del valor superior permitido para la estabilidad de los esquemas numéricos propuestos en este trabajo. El error puntual entre la solución exacta y la numérica se calcula en cada experimento para tener una idea del orden de exactitud del método numérico en cada valor de  $\beta$  elegido. Se considera analizar los resultados en el tiempo  $t = 58$  sg, aproximadamente, para el cual la solución analítica, e

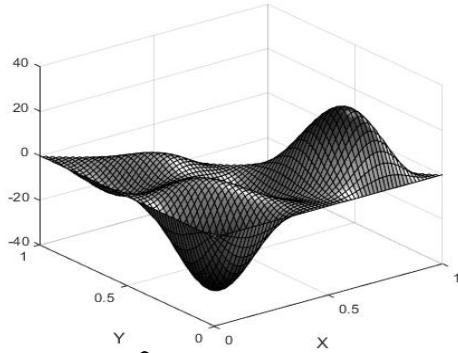


Figura 2:  $\hat{U}$  exacta en 3D.

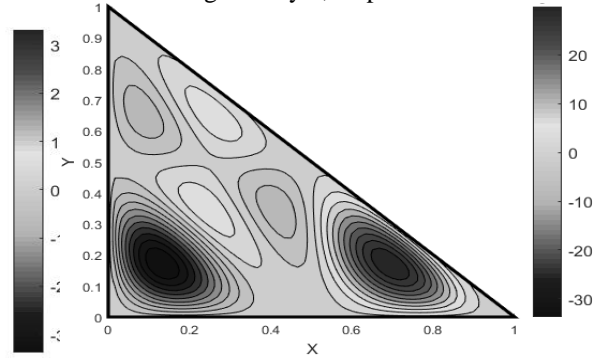


Figura 3: Curva de nivel  $\hat{U}$  exacta.

En las Figuras 4 y 5 se muestra la solución numérica, tanto en 3D como sus curvas de nivel, para el caso de  $\beta = 1/60$  que está por debajo del valor mínimo requerido para la estabilidad del método numérico. En comparación con la solución exacta mostrada en las Figuras 2 y 3, se observa que el método pareciera ser estable. Sin embargo, un cálculo del error puntual demuestra que el método numérico no está aproximando la solución exacta. En efecto, el error absoluto máximo alcanzado entre ellas fue de 31.7266.

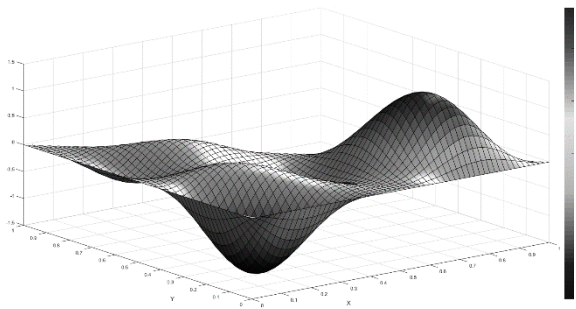


Figura 4:  $\hat{U}$  numérica, 3D, para  $\beta=1/60$ .

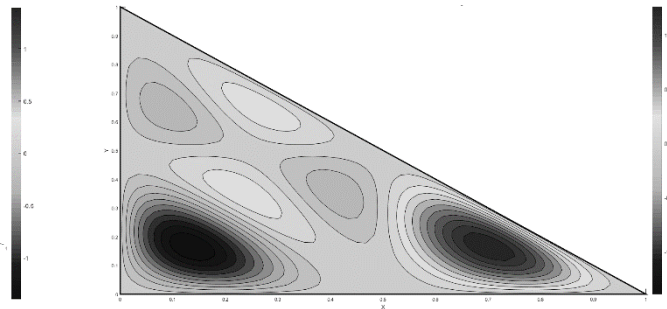


Figura 5: Curvas de nivel de  $\hat{U}$  numérica, para  $\beta=1/60$ .

Para los casos  $\beta = 1/48$  y  $\beta = 5/48$ , las Figuras 6, 7, 8 y 9 muestran la solución numérica, en 3D y las curvas de nivel respectivas en cada caso. Como se observa, el método numérico es estable y aproxima la solución exacta con errores absolutos máximos: de  $5.7 \times 10^{-3}$  para  $\beta = 1/48$  y de  $2.9 \times 10^{-2}$  para  $\beta = 5/48$ . Esto sugiere que al tomar  $\beta$  cerca del valor máximo requerido para la estabilidad del método proporciona una solución numérica con menor exactitud que para valores de  $\beta$  tomados dentro del intervalo y cerca del valor mínimo requerido para la estabilidad.

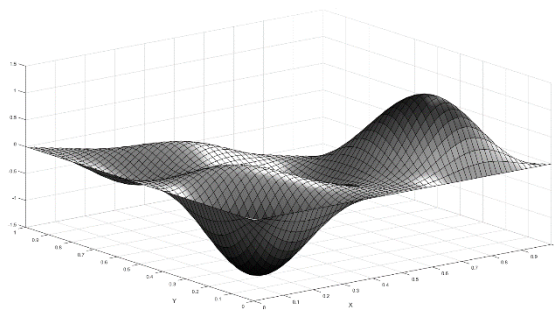


Figura 6:  $\hat{U}$  numérica, 3D, para  $\beta=1/48$ .

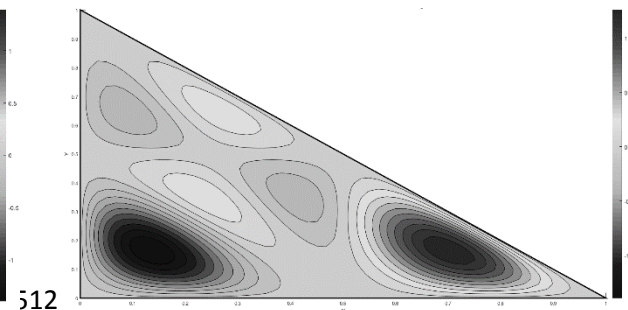


Figura 7: Curva de nivel de  $\hat{U}$  numérica para  $\beta=1/48$ .



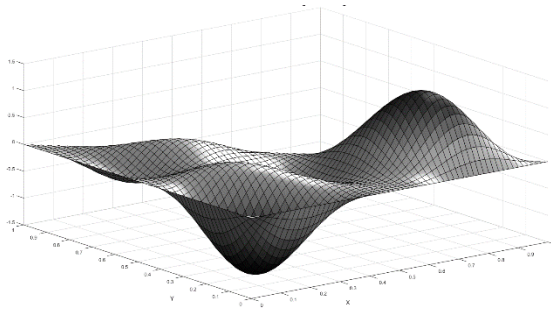


Figura 8:  $\hat{U}$  numérica, 3D, para  $\beta=5/48$ .

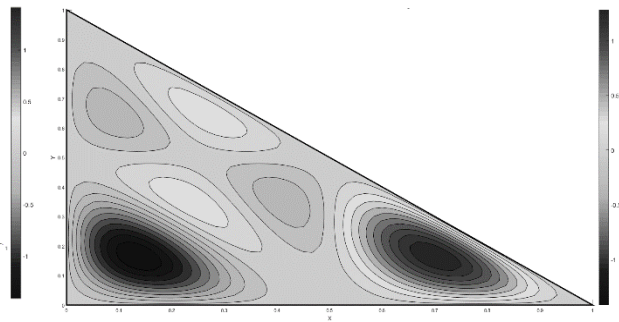


Figura 9: Curva de nivel de  $\hat{U}$  numérica para  $\beta=5/48$ .

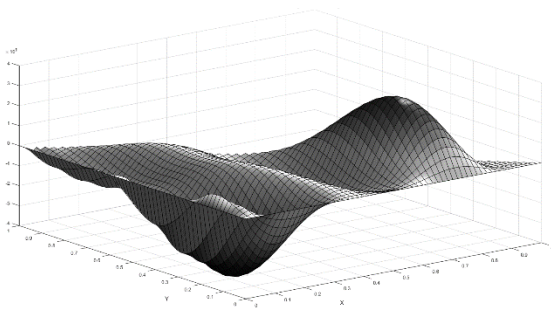


Figura 10:  $\hat{U}$  numérica, 3D, para  $\beta=1/8$ .

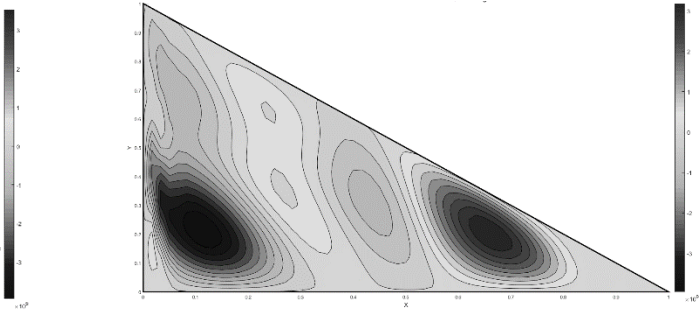


Figura 11: Curva de nivel de  $\hat{U}$  numérica para  $\beta=1/8$ .

Finalmente, las Figuras 10 y 12 muestran los resultados numéricos correspondientes a los valores de  $\beta = 1/8$  y  $\beta = 1/2$ , respectivamente. Para  $\beta = 1/8$ , la solución se deteriora en los puntos del dominio computacional que están cerca de la frontera, y para los puntos que están alejados de la frontera la solución numérica no presenta un deterioro muy notable. Esto se debe a que para este valor de  $\beta$  el esquema numérico en diferencias finitas para el estencil de 8 puntos es inestable ya que el valor máximo para su estabilidad es  $5/48$ , mientras que para el esquema numérico en diferencias finitas para el estencil de 9 puntos este valor de  $\beta$  está dentro de su rango de estabilidad. Sin embargo, el error absoluto máximo alcanzado para este caso fue de  $3.5 \times 10^9$ , sugiriendo que se deben considerar valores de  $\beta$  en la intersección de los rangos de estabilidad correspondientes a ambos esquemas numéricos como el que se reporta en el Teorema 1

En el caso  $\beta = 1/2$ , que está fuera de ambos rangos de estabilidad para los esquemas numéricos en diferencias finitas, el error absoluto máximo fue de  $1.052 \times 10^{74}$ .

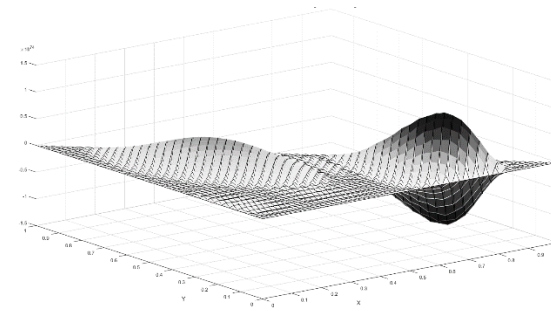


Figura 12:  $\hat{U}$  numérica, 3D, para  $\beta=1/2$ .

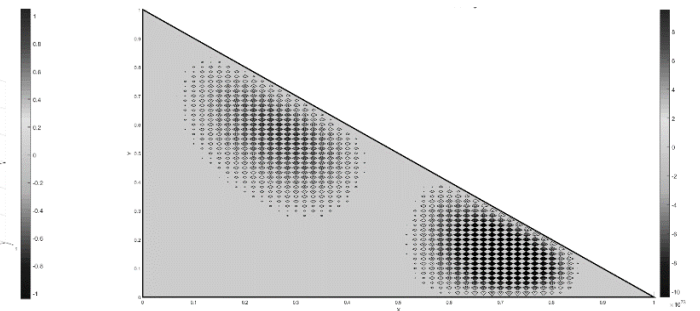


Figura 13: Curva de nivel de  $\hat{U}$  numérica para  $\beta=1/2$ .

## 6. CONCLUSIONES

En este trabajo se propone un método numérico basado en el MDF, para aproximar la solución numérica de la EDP parabólica

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \Delta U = f$$

sobre un dominio bidimensional  $\Omega$ , de frontera denotada por  $\partial\Omega$ , con la forma de triángulo arbitrario con sus vértices ubicados en el plano cartesiano  $(x, y)$ . Una transformación lineal adecuada conllevó a obtener un problema equivalente sobre un triángulo rectángulo isósceles con vértices:  $(0,0)$ ,  $(1,0)$  y  $(0,1)$ , y el Laplaciano en las nuevas coordenadas resultó con un término de derivas cruzadas de segundo orden. El nuevo dominio se discretizó mediante una partición regular, la cual está formada por un conjunto de puntos interiores y puntos sobre las fronteras. Sobre el conjunto de puntos interiores se propusieron dos esquemas en diferencias finita para tamaño de pasos espacial uniforme e iguales, de la manera siguiente: uno definido a partir de un estencil de 9 puntos para aproximar la solución en los puntos que no son adyacentes a la hipotenusa del triángulo, y otro definido a partir de un estencil con 8 puntos usado en la aproximación de la solución en los puntos adyacentes a la hipotenusa. Se demostró, mediante un análisis de estabilidad estándar para MDF's, que el método numérico diseñado con estos dos esquemas es estable para valores de  $\beta = \frac{\Delta t}{h^2}$  tomados en la intersección de los rangos de estabilidad de ambos esquemas en diferencias finitas por separado. Para un caso específico de un problema con solución exacta conocida, se realizaron simulaciones numéricas para distintos valores de  $\beta$  que validaron el resultado teórico de estabilidad presentado en este trabajo.

RECEIVED: AUGUST, 2019

REVISED: OCTOBER, 2019.

## REFERENCIAS

- [1] BIRKHOFF, G., and LYNCH, R. E. (1990): Some current questions on solving linear elliptic problems. **Numerische Mathematik**, 57, 527–545.
- [2] GERALD, C. F. and WHEATLEY P.O. (2001): **Análisis numérico con aplicaciones**. Pearson Educación, México.
- [3] HINDMARSH, A., GRESHO, P., and GRIFFITHS, D. (1984): The stability of explicit Euler time-integration for certain finite difference approximations of the multi-dimensional advection–diffusion equation. **International journal for numerical methods in fluids**, 4, 853–897.
- [4] LEVEQUE, R. J., and LI, Z. (1994): The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 31, 1019–1044.
- [5] LI, M. and TANG, T. (1996): Steady viscous flow in a triangular cavity by efficient numerical techniques. **Computers & Mathematics with applications**, 31, 55–65.
- [6] LUCQUIN, B. (2004): **Equations aux dérivées partielles et leurs approximations**. Ellipses. Paris.
- [7] QUARTERONI, A., SACCO, R., and SALERI, F. (2010): **Numerical mathematics**, volume 37 Springer Science & Business Media, New York.
- [8] SHOICHIRO, N. (1992): **Métodos Numéricos aplicados con software**. Prentice-Hall Hispanoamericana SA, México.
- [9] VARAH, J. M. (1980): Stability restrictions on second order, three level finite difference schemes for parabolic equations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 17, 300–309.
- [10] WESSELING, P. (1996): Von Neumann stability conditions for the convection-diffusion equation. **IMA Journal of Numerical Analysis**, 16, 583–598.