

MEDIDA DE LA EFECTIVIDAD DEL PROGRAMA "MATERIAL CONCRETO" PARA EL LOGRO DEL APRENDIZAJE DE NÚMEROS ENTEROS EN ESTUDIANTES BILINGÜES

Ronald Gamarra Salinas^{*1}, Julia Cecilia Yon Delgado^{*}, Ángel Amado Romero Cahuana^{*}, Claudia Patricia Yon Delgado^{**}, Angy Jaksul Araujo Noriega^{***}

^{*}Universidad Nacional Intercultural de la Amazonía, Pucallpa, Perú.

^{**}I.E.P. Little Winners, Lima, Perú

^{***}I.E.E N.º 560 Pucallpa, Perú

RESUMEN

Se ha demostrado que los estudiantes de nivel secundario de Perú presentan dificultades en los cálculos relacionados con números enteros. Para revertir esta situación se elaboró el método "material concreto". El objetivo de esta investigación es demostrar que el programa "material concreto" influye en el logro del aprendizaje de números enteros en los estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del primer año del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa en 2023. Para determinar en qué medida ocurre la mejora se utiliza el modelo multinomial con prior Dirichlet, que permite considerar diferentes situaciones como éxitos, pues se tiene en cuenta el número de niveles escalados por los estudiantes en su mejora y no solamente la dicotomía de si mejoró o no en su desempeño. Los resultados muestran que, tras aplicar el programa, el grupo experimental alcanzó una clasificación cualitativa de "Logro destacado" en todas las habilidades evaluadas [valor de 2-tupla lingüística: (s_4 , -0.40) para números enteros], mientras que el grupo de control no superó "En inicio" para números enteros y "En proceso" para adición y sustracción. El modelo multinomial con prior Dirichlet estimó que la probabilidad de mejorar tres niveles (IC 95%) fue: adición 0.441 [0.399, 0.484], sustracción 0.524 [0.480, 0.568] y números enteros 0.424 [0.381, 0.467]. La probabilidad de mejorar al menos dos niveles superó el 70% en todas las habilidades. Por otro lado, se realizan operaciones entre valores cualitativos expresados con variables de tipo ordinal, apoyados en el modelo lingüístico de 2-tuplas. De esta manera las operaciones aritméticas que se realizan entre evaluaciones ordinales mantienen su sentido lingüístico sin perder la exactitud numérica.

PALABRAS CLAVES: Habilidades matemáticas, modelo lingüístico de 2-tuplas, modelo multinomial con prior Dirichlet, coeficiente alfa de Cronbach.

MSC: 62P99, 68T30, 68T50.

ABSTRACT

It has been shown that secondary school students in Peru have difficulties with calculations involving integers. To reverse this situation, the "concrete material" method was developed. The objective of this research is to demonstrate that the "concrete material" program influences the achievement of learning integers in bilingual students in two educational institutions of the first year of secondary school in the district of Yarinacocha, Pucallpa in 2023. To determine the extent to which the improvement occurs, the multinomial model with Dirichlet prior is used, which allows considering different situations such as success, since it takes into account the number of levels scaled by the students in their improvement and not only the dichotomy of whether or not they improved in their performance. Results show that, after applying the program, the experimental group reached a qualitative classification of "Outstanding Achievement" in all assessed skills [2-tuple linguistic value: (s_4 , -0.40) for integers], while the control group did not exceed "Beginning" for integers and "In process" for addition and subtraction. The multinomial Dirichlet model estimated the probability of improving three levels (95% CI) as: addition 0.441 [0.399, 0.484], subtraction 0.524 [0.480, 0.568], and integers 0.424 [0.381, 0.467]. The probability of improving at least two levels exceeded 70% across all skills. On the other hand, operations are performed between qualitative values expressed as ordinal variables, supported by the 2-tuple linguistic model. In this way, arithmetic operations performed between ordinal assessments maintain their linguistic meaning without losing numerical accuracy.

KEYWORDS: Mathematical skills, 2-tuple linguistic model, multinomial model with Dirichlet prior, Cronbach's alpha coefficient.

1. INTRODUCCIÓN

En Latinoamérica los resultados de las pruebas internacionales revelan que en promedio 6 de cada 10 estudiantes de 15 años no saben usar fórmulas matemáticas básicas ni procedimientos o reglas para resolver problemas con números enteros. Si bien los resultados de los estudiantes peruanos en PISA 2018 muestran mejoras, no se puede dejar de trabajar con los más de 50% que aún se ubican en los niveles más bajos en las tres áreas evaluadas y las brechas de inequidad que aún quedan pendientes por cerrar.

La problemática en Matemática en el Perú, según los resultados de PISA 2022, se manifiesta en un retroceso significativo del aprendizaje, donde el puntaje promedio nacional disminuyó 9 puntos respecto a 2018. Esta situación revela que el 66,2% de los estudiantes peruanos se encuentra en el nivel de bajo rendimiento (por debajo del Nivel 2), lo que significa

¹ Email corresponding author: rgamarras@unia.edu.pe

que no poseen las competencias básicas para resolver problemas matemáticos elementales y las operaciones de los números naturales, enteros y racionales.

En consecuencia, los estudiantes peruanos que culminan el nivel secundario presentan dificultades en el desarrollo de sus habilidades matemáticas para hacer uso del cálculo mental y el razonamiento. Así mismo, los resultados de la evaluación ENLA 2023, indica que la región Ucayali ocupa el penúltimo lugar, cuyos resultados en matemática del segundo grado de secundaria se ubican en el nivel previo al inicio con un porcentaje de 21,8%, el 43,9% se ubica en inicio, el 24,8% en proceso y 9,5% en el nivel satisfactorio. De esta manera se concluye que aún se sigue teniendo dificultades en la región en cuanto al logro de aprendizaje en conjuntos de números reales.

Los estudiantes del primer año del nivel secundario presentan problemas con las operaciones con números enteros, sus propiedades y la aplicación de estas en la resolución de problemas, así como la inadecuada sistematización de estrategias. Tienen dificultades en las operaciones de signos en cuanto a la adición y sustracción de números enteros. Por otro lado, los estudiantes manifiestan dificultades importantes relacionadas con la conceptualización de los números negativos en el ámbito aritmético-algebraico.

Durante décadas, la Amazonía ha sido ignorada por las políticas educativas del Estado. Esta exclusión afecta a más de 4 millones de peruanos, incluyendo 51 pueblos originarios que hablan 44 lenguas. La deuda es histórica, pero el abandono es actual. Los datos son alarmantes: solo el 19% de los estudiantes amazónicos comprende lo que lee, y apenas el 15,1% logra resolver problemas matemáticos básicos.

A nivel institucional, se ha observado a los estudiantes del primer año en la institución educativa bilingüe "San Francisco", donde la mayoría tiene deficiencia en las operaciones y problemas de la adición y sustracción de números enteros, así como también para reconocer los números positivos y negativos. No saben diferenciarlos; consecuentemente, los contenidos posteriores o secuenciales que son más difíciles resultan aún más difíciles de aprender. Es por todo esto que surge la idea de diseñar el "material concreto", que es un programa pedagógico creado para influir en el logro del aprendizaje de los números enteros en los estudiantes bilingües en las dos instituciones educativas.

El objetivo de este artículo es demostrar que "material concreto" es efectivo en la mejora del aprendizaje de los estudiantes en dos instituciones educativas del primer año del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa en el año 2023. En este se realiza la medición de cuánto se mejora con la aplicación de este programa, mediante la aplicación de pruebas académicas a los estudiantes antes y después de pasar este programa en sus instituciones.

Se realiza el estudio cualitativo de los aspectos que se evalúan en cuanto a las categorías ordinales "En inicio", "En proceso", "Logro esperado" y "Logro destacado". Para procesar los datos se utiliza el modelo lingüístico de 2-tuplas [3][6]. Esta técnica forma parte de los Cálculos con Palabras o Computing with Words (CWW) en inglés, donde se procesa el lenguaje natural [12][19]. Con este método se realizan operaciones entre términos que mantienen su significado y a la vez se les asocia un valor numérico entre -0.5 y 0.5 que refleja el grado de exactitud de la operación aplicada. El cálculo con palabras es una manera natural del ser humano de evaluar, más que con números. Además, como las habilidades que se van a medir son complejas, es preferible contar con esta manera de medir que con una escala numérica.

Por otro lado se utiliza el modelo multinomial con prior Dirichlet para determinar en qué grado cada estudiante mejoró su desempeño después de pasar por el "material concreto" [13]. Como se trata de valores de tipo ordinal, es posible llegar a categorías para evaluar el desempeño de los estudiantes y a la vez no se pierde la exactitud. El modelo multinomial con prior Dirichlet permite medir diferentes situaciones de mejora de cada estudiante, donde se considera el grado en que mejora el estudiante; por ejemplo, si pasa de "En inicio" a "Logro esperado" es un caso más positivo que simplemente pasar de "En inicio" a "En proceso" [16].

El artículo se divide en una sección de Materiales y Métodos donde se recuerdan los conceptos fundamentales del modelo lingüístico de 2-tuplas, modelo multinomial de Dirichlet y coeficiente alfa de Cronbach [10][11]. Este último se utilizó para medir la fiabilidad de las pruebas aplicadas a los estudiantes. Luego, la sección de Resultados contiene los cálculos numéricos a los que se llegaron en el estudio que se realizó. La última sección se dedica a las Conclusiones.

2.. MATERIALES Y MÉTODOS

La sección se dedica a la definición de los conceptos fundamentales que se utilizan en el artículo.

2.1. Modelo Lingüístico de 2-Tuplas

La idea fundamental del modelo lingüístico de 2-tuplas está en que se pueden realizar cálculos con palabras sin perder el significado semántico ni la información después de realizar una operación [8][9]. A continuación, se exponen las definiciones formales de este concepto.

Para comenzar se parte de un conjunto de términos lingüísticos $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ donde $\beta \in [0, g]$ es un valor numérico que se encuentra en el intervalo de granularidad del conjunto S .

Definición 1. ([8][9]) Se conoce por traducción simbólica del término lingüístico $s_i \in S$ el valor real en el intervalo $[-0.5, 0.5)$ que especifica la diferencia de información contenida entre el valor β que se calcula a partir de una operación simbólica y el valor $i \in \{0, \dots, g\}$ correspondiente al índice de la etiqueta más cercana en S .

Definición 2. ([8][9]) Partiendo de $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$ y $\beta \in [0, g]$ donde g es un número entero par, este último calculado como resultado de una operación simbólica, se define la 2-tupla lingüística por la Ecuación 1:

$$\Delta: [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5) \quad (1)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha)$$

tal que s_i se obtiene de las ecuaciones $i = \text{round}(\beta)$ y $\alpha = \beta - i$, $\alpha \in [-0.5, 0.5)$, donde round es el operador de redondeo al entero más cercano. S_i es el elemento de S correspondiente al índice i -ésimo y α es el valor de la traducción simbólica.

Definición 3. Si se tiene un conjunto de n 2-tuplas $l_j = \{(s_{-}\{T_{ij}\}, a_j)\}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) y adicionalmente $w_i = (w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{in})^T$ es un vector de pesos, tal que $w_i \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^n w_j = 1$, entonces dos operadores de agregación simbólicos son la Media Aritmética Ponderada y la Media Geométrica Ponderada, las cuales se definen por las Ecuaciones 2 y 3, respectivamente:

$$MAP(l_1, l_2, \dots, l_n) = \sum_{j=1}^n w_j l_j \quad (2)$$

$$MGP(l_1, l_2, \dots, l_n) = \prod_{j=1}^n l_j^{w_j} \quad (3)$$

2.2. Modelo Multinomial con Prior de Dirichlet

La distribución multinomial es una generalización de la distribución binomial [2][7]. Se aplica cuando un experimento tiene dos o más resultados posibles. En el caso de que sean solamente dos resultados esperados se convierte en una binomial. La Ecuación 4 la define como:

$$f(n_1, n_2, \dots, n_k) = [n! / (n_1! n_2! \dots n_k!)] \cdot p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_k^{n_k} \quad (4)$$

Tal que p_1, p_2, \dots, p_k son las probabilidades respectivas de que ocurran k eventos mutuamente excluyentes E_1, E_2, \dots, E_k , donde $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k n_i = n$. n_1, n_2, \dots, n_k denotan el número de ocurrencias de los eventos E_1, E_2, \dots, E_k , respectivamente.

La media de esta distribución se define por:

$$E(n_i) = n p_i \quad (5)$$

La varianza se calcula por:

$$V(n_i) = n p_i (1 - p_i) \quad (6)$$

La teoría de probabilidades y estadísticas bayesianas se diferencia de la frecuentista en que parte de probabilidades dadas a priori por expertos y que luego se actualizan con los datos reales obtenidos. De esta manera se parte de una probabilidad a priori para calcular una probabilidad a posteriori. La fórmula del modelo bayesiano de la función de densidad de Dirichlet es la siguiente:

$$f(p | \alpha) = [\Gamma(\sum_{i=1}^k \alpha_i) / \prod_{i=1}^k \Gamma(\alpha_i)] \cdot \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i - 1} \quad (7)$$

Se dice que p tiene una distribución Dirichlet con vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ tal que $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$; $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ y $\sum_{i=1}^k \alpha_i = n$. La media y la varianza de esta distribución son, respectivamente:

$$E(p_i | \alpha_i) = \alpha_i / n \quad (8)$$

$$Var(p_i | \alpha_i) = [\alpha_i (n - \alpha_i)] / [n^2 (n + 1)] \quad (9)$$

Supóngase que $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)^T$ tiene una distribución multinomial con parámetro n fijo y donde $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)^T$ es el vector de probabilidad de ocurrencia desconocido. Además, si se tiene que la distribución a priori de p es una Dirichlet con vector de parámetros $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)^T$ con $\alpha_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, k$. Entonces, la distribución a posteriori de p cuando $Y_i = y_i$, $i = 1, 2, \dots, k$, es también una distribución de Dirichlet con vector de parámetros $\alpha^* = (\alpha_1 + y_1, \alpha_2 + y_2, \dots, \alpha_k + y_k)^T$.

Con ayuda de esta propiedad se puede establecer que la media a posteriori es la siguiente:

$$E(p_i | n, \alpha) = (\alpha_i + n_i) / \sum_{j=1}^k (\alpha_j + n_j) \quad (10)$$

2.3. Coeficiente Alfa de Cronbach

El coeficiente alfa de Cronbach se utiliza frecuentemente en ciencias sociales para medir el grado de fiabilidad de una encuesta. Su fórmula matemática es la siguiente [15][18]:

$$\alpha = [k / (k - 1)] \cdot [1 - (\sum_{i=1}^k S_i^2) / S^2] \quad (11)$$

tal que S_i^2 representa la varianza de la i -ésima pregunta, S^2 representa la varianza de todos los valores observados y k es el número de preguntas de la encuesta.

3. RESULTADOS

La presente sección contiene los detalles de los procedimientos seguidos para resolver el problema, los cálculos numéricos utilizados y los resultados a los que se llegó.

El programa "material concreto" es un conjunto de actividades planificadas y elaboradas a través de estrategias, métodos y técnicas, que se plasman en las actividades de aprendizaje con el fin de aprender los números enteros, mediante el material concreto estructurado y no estructurado. Son recursos o herramientas pedagógicas de apoyo que pueden favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje siempre y cuando estos sean bien utilizados. Se define como el conjunto de elementos auditivos, visuales y figuras que influyen en los sentidos de los estudiantes despertando el interés por aprender, logrando de esta manera un aprendizaje significativo. Del mismo modo, los materiales educativos son un medio de apoyo que se utilizan en el aula, con los cuales interactúa el estudiante con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo.

Este es un programa que tiene como función proporcionar información, cumplir un objetivo, guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje, contextualizar a los estudiantes, favorecer la comunicación entre docentes y estudiantes, acercar las ideas a los sentidos y motivar a los estudiantes.

Es así que los materiales didácticos pueden ser utilizados en el proceso de enseñanza aprendizaje en diversas funciones didácticas, a saber: en la introducción de un tema, en la transmisión de información sobre los contenidos referentes a ese tema, en la sistematización, consolidación y profundización de los conocimientos, para ilustrar a modo de ejemplo los procedimientos y algoritmos de acción e identificar las características de objetos y fenómenos de difícil acceso. Por lo tanto, el material concreto permite desarrollar capacidades, enriquecer los conocimientos y alcanzar los objetivos deseados.

La prueba para medir el conocimiento de números enteros por parte de los estudiantes consiste en la medición antes y después de pasar el programa de "material concreto" por un grupo experimental. Por otra parte, un grupo de control recibe el contenido mediante el programa tradicional. Se procede a medir mediante una prueba de objetivos a través de 20 preguntas con sus respectivas dimensiones: adición y sustracción de números enteros, con opciones múltiples desde "A" hasta "D". Las Tablas 1 y 2 presentan una síntesis de la operacionalización de las variables; los indicadores detallados se recogen en el Anexo.

Variables	Dimensiones	Indicadores (síntesis)	Escala de medición
VI: Programa "material concreto"	Material concreto estructurado	Emplea Multi base 10, Baldosa aritmética, Regleta numérica, Crucinúmero, Tangram y Ábaco para operar adición y sustracción de números enteros.	Sesiones experimentales
	Material concreto no estructurado	Utiliza Botella de plástico, Botones numérico, Piedras, Cajas, Pinza de ropa y Huaruro blanco/negro para adición y sustracción de números enteros.	

Tabla 1. Operacionalización sintética de la Variable Independiente (VI): Programa "material concreto".

Variables	Dimensiones	Indicadores (síntesis)	Escala de medición
VD: Números enteros	Adición de números enteros	Resuelve operaciones de adición con signos, operaciones combinadas (paréntesis, corchetes) y problemas contextualizados (venta de productos, pescado, propina, fruta, movimiento vehicular).	Escala dicotómica: Correcto = 1 pto. / Incorrecto = 0 pto. Niveles: AD = Logro destacado [18-20] A = Logro esperado [14-17] B = En proceso [11-13] C = En inicio [0-10]
	Sustracción de números enteros	Resuelve operaciones de sustracción con signos, operaciones combinadas y problemas contextualizados (temperatura, venta de sandalias/botellas, contrato de fútbol). Ordena enteros en la recta numérica e identifica signos.	

Tabla 2. Operacionalización sintética de la Variable Dependiente (VD): Números enteros.

Nota: El término "crucinúmero" designa un material didáctico de elaboración propia consistente en una grilla de tipo crucigrama, adaptada para ejercitar operaciones con números enteros. Su diseño concreto se describe en la guía del programa (disponible a solicitud del autor).

La muestra estuvo conformada por 45 estudiantes del primer año del nivel secundario, distribuidos en un grupo de control de 15 estudiantes y un grupo experimental con 30 estudiantes. La selección no es aleatoria [1][5]. Se analizan estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa en el año 2023.

Para evaluar la fiabilidad de la prueba sobre el logro de aprendizaje de números enteros, se aplicó una muestra piloto a 30 estudiantes y los resultados fueron evaluados a través del coeficiente alfa de Cronbach (Ecuación 11). Cada una de las habilidades a medir obtuvo un coeficiente alfa de Cronbach entre 0.818 y 0.900, lo cual indica una consistencia interna muy alta. Así se demostró que la prueba que se les va a aplicar a los estudiantes es suficientemente fiable.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes. La Tabla 3 resume los resultados obtenidos en el test inicial para los grupos de control y experimental.

Nivel	I.E. Bilingüe N°64088 (Grupo control)		I.E. Bilingüe San Francisco (Grupo experimental)	
	fi	%	fi	%
Logro destacado	0	0	0	0
Logro esperado	0	0	0	0
En proceso	4	26.7	3	10.0
En inicio	11	73.3	27	90.0
Total	15	100	30	100

Tabla 3. Resultados porcentuales del pre-test del logro de aprendizaje de números enteros en los estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa-2023.

Nivel	Grupo control Adición		Grupo experimental Adición		Grupo control Sustracción		Grupo experimental Sustracción	
	fi	%	fi	%	fi	%	fi	%
Logro destacado	0	0	0	0	0	0	0	0
Logro esperado	0	0	0	0	0	0	0	0
En proceso	5	33.3	2	6.7	4	26.7	1	3.3
En inicio	10	66.7	28	93.3	11	73.3	29	96.7
Total	15	100	30	100	15	100	30	100

Tabla 4. Resultado porcentual del pre-test por dimensiones (adición y sustracción) del logro de aprendizaje de números enteros en los estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa-2023.

En el caso de estudio es necesario adaptar el modelo lingüístico de 2-tuplas cuando la cardinalidad de S es par. Para ello se añade el término AB para denotar "entre logro esperado y en proceso", que se le asigna al estudiante con puntuación exactamente 14, según la escala que se indicó en la Tabla 2.

De esta manera se tiene el conjunto $S = \{s_0 = C \text{ (En inicio)}, s_1 = B \text{ (En proceso)}, s_2 = AB \text{ (intermedio)}, s_3 = B \text{ (En proceso superior)}, s_4 = A \text{ (Logro esperado/destacado)}\}$.

Calculando la Media Aritmética Ponderada se tienen los siguientes resultados lingüísticos para el pre-test:

Grupo	Números enteros	Adición de números enteros	Sustracción de números enteros
Control	(s_1 , 0.0667)	(s_0 , 0.3333)	(s_0 , 0.2667)
Experimental	(s_0 , 0.1000)	(s_0 , 0.6667)	(s_0 , 0.0333)

Tabla 5. 2-tuplas lingüísticas de los resultados obtenidos en el pre-test para los grupos de control y experimental con respecto a las tres habilidades medidas.

De los resultados de la Tabla 5 se llega a la conclusión de que en promedio, en el pre-test, tanto el grupo de control como el grupo experimental se encuentran en el nivel "En inicio" (s_0). El grupo experimental tiene peores condiciones de partida, como se aprecia en los valores de la traducción simbólica, en todos los casos superiores a los del grupo de control.

Las Tablas 6 y 7 contienen los resultados del post-test.

Nivel	I.E. Bilingüe N°64088 (Grupo control)		I.E. Bilingüe San Francisco (Grupo experimental)	
	fi	%	fi	%
Logro destacado	0	0	20	66.7
Logro esperado	3	20.0	10	33.3
En proceso	5	33.3	0	0
En inicio	7	46.7	0	0
Total	15	100	30	100

Tabla 6. Resultados porcentuales del post-test del logro de aprendizaje de números enteros en los estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa-2023.

Nivel	Grupo control Adición		Grupo experimental Adición		Grupo control Sustracción		Grupo experimental Sustracción	
	fi	%	fi	%	fi	%	fi	%
Logro destacado	0	0	20	66.7	0	0	25	83.3
Logro esperado	1	6.7	8	26.7	0	0	3	10.0
En proceso	9	60.0	2	6.7	10	66.7	2	6.7
En inicio	5	33.3	0	0	5	33.3	0	0
Total	15	100	30	100	15	100	30	100

Tabla 7. Resultado porcentual del post-test por dimensiones (adición y sustracción) del logro de aprendizaje de números enteros en los estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa-2023.

Grupo	Números enteros	Adición de números enteros	Sustracción de números enteros
Control	$(s_0, 0.2667)$	$(s_1, -0.2000)$	$(s_1, 0.6667)$
Experimental	$(s_4, -0.4000)$	$(s_4, -0.4667)$	$(s_4, -0.3000)$

Tabla 8. 2-tuplas lingüísticas de los resultados obtenidos en el post-test para los grupos de control y experimental con respecto a las tres habilidades medidas.

Las 2-tuplas lingüísticas indican que, en el grupo de control, durante el post-test, se obtuvieron mejoras interpretadas como ligeramente superiores a "En inicio" para el trabajo con números enteros, y en el rango de "En proceso" para adición y sustracción. En el caso del grupo experimental los resultados fueron ligeramente inferiores a "Logro destacado", lo cual es un resultado cualitativamente notable, máxime teniendo en cuenta las peores condiciones de partida de este grupo.

A continuación, se analiza la magnitud del cambio según el modelo multinomial con prior Dirichlet. Para ello se consideran los siguientes eventos en relación al grupo experimental:

- E_0 : No se produjo mejora,
- E_1 : Se produjo mejora de 1 puesto,
- E_2 : Se produjo mejora de 2 puestos,
- E_3 : Se produjo mejora de 3 puestos.

De los resultados mostrados se tiene:

- Para el trabajo con la adición de números enteros: $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (0, 3, 8, 19)$,
- Para el trabajo con la sustracción de números enteros: $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (0, 2, 4, 24)$,
- Para el trabajo con números enteros: $(n_0, n_1, n_2, n_3) = (0, 1, 11, 18)$.

donde n_i es el número de estudiantes correspondiente al evento E_i con $i = 0, 1, 2, 3$.

Se comienza con un valor inicial no informativo, igual para cada una de las categorías: $\alpha_i = 7.5$. Los intervalos de credibilidad al 95% se obtuvieron mediante muestreo MCMC implementado con el paquete PyMC versión 3.12.4 del lenguaje Python [4]. Los resultados de los cálculos se presentan en la Tabla 9. Cada celda muestra la probabilidad posterior media junto con su intervalo de credibilidad al 95%.

Niveles mejorados	Adición	Sustracción	Enteros
0 niveles (sin mejora)	0.125 [0.098, 0.155]	0.125 [0.097, 0.153]	0.125 [0.099, 0.151]
1 nivel	0.174 [0.140, 0.209]	0.158 [0.123, 0.193]	0.142 [0.109, 0.176]
2 niveles	0.260 [0.222, 0.298]	0.193 [0.156, 0.232]	0.308 [0.268, 0.348]
3 niveles	0.441 [0.399, 0.484]	0.524 [0.480, 0.568]	0.424 [0.381, 0.467]

Tabla 9. Resultados de aplicar el modelo multinomial con prior Dirichlet al grupo experimental. Se muestran probabilidades medias con intervalo de credibilidad al 95% [IC 95%].

Se aprecia en la Tabla 9 que las mayores probabilidades de mejora están en 3 niveles, con probabilidades que oscilan entre 0.424 [0.381, 0.467] para números enteros y 0.524 [0.480, 0.568] para sustracción. Si se suma la probabilidad de mejorar en 2 y en 3 niveles, la probabilidad total supera el 70% en todas las habilidades: adición 70.1%, sustracción 71.7% y números enteros 73.2%. Esto confirma la alta efectividad del programa para lograr mejoras sustanciales en el desempeño de los estudiantes.

4. CONCLUSIONES

El programa de "material concreto" es una medida que permite mejorar el desempeño de los estudiantes peruanos de la escuela secundaria en sus habilidades con el trabajo con números enteros, incluyendo la adición y la sustracción. El objetivo de este artículo es demostrar que este programa es efectivo en estudiantes bilingües en dos instituciones educativas del nivel secundario del distrito de Yarinacocha, Pucallpa durante 2023. Como la selección de los estudiantes a estudiar no es aleatoria [14][17], se utilizó un modelo multinomial con prior Dirichlet para calcular las probabilidades de mejora antes y después de pasar el programa. Se analiza la mejora en cuatro eventos: "no mejora", "mejora en 1 nivel", "mejora en 2 niveles" y "mejora en 3 niveles".

Se concluyó que la mayor probabilidad está en la mejora en tres niveles: adición 0.441 [IC 95%: 0.399, 0.484], sustracción 0.524 [IC 95%: 0.480, 0.568] y números enteros 0.424 [IC 95%: 0.381, 0.467]. Si se suma la probabilidad de mejorar en 2 y en 3 niveles, la probabilidad total supera el 70% en las tres habilidades. Es decir, se puede asegurar que el método es muy efectivo, al menos en los grupos estudiados.

Otro elemento de estudio fue la interpretación lingüística de los resultados, para ello se contó con el modelo lingüístico de 2-tuplas. Antes de pasar el programa, el grupo experimental tenía un valor promedio de "En inicio" (so) en todas las habilidades, al igual que el grupo de control. Una vez aplicado el programa de "material concreto", el grupo experimental alcanzó la clasificación de "Logro destacado" [(s₄, -0.40) para números enteros], mientras que el grupo de control no superó la clasificación de "En proceso". Esto es una confirmación de la eficacia del programa pedagógico analizado.

RECEIVED: DECEMBER, 2025.

REVISED: MAY, 2026.

REFERENCIAS

- [1] ASIAMA, N., MENSAH, H. K., and OTENG-ABAYIE, E. F. (2022). Non-probabilistic sampling in quantitative clinical research: A typology and highlights for students and early career researchers. *International Journal of Applied Research on Public Health Management (IJARPHM)*, 7, 1-18.
- [2] BERNARD, J. M. (2005). An introduction to the imprecise Dirichlet model for multinomial data. *International Journal of Approximate Reasoning*, 39, 123-150.
- [3] BUENO, I., CARRASCO, R. A., PORCEL, C., and HERRERA-VIEDMA, E. (2022). Profiling clients in the tourism sector using fuzzy linguistic models based on 2-tuples. *Procedia Computer Science*, 199, 718-724.
- [4] CASTRO, M. (2025). *Approximate Bayesian Computation Made Easy: A Practical Guide to ABC-SMC for Dynamical Systems with pymc*. arXiv preprint arXiv:2511.21587.

- [5] CHACÓN, L. J. R., MORALES, G. E. R., LUNA, A. C. P., MEDINA, J. H. C., y CANTUÑA-VALLEJO, P. F. (2022). El Muestreo Intencional No Probabilístico como herramienta de la investigación científica en carreras de Ciencias de la Salud. **Universidad y Sociedad**, 14, 681-691.
- [6] CHAVEZ, W. O., VALER, E. B., GUILLERMO, J. C. L., y TERRAZO, E. G. (2022). Estudio basado en el modelo de 2-tuplas sobre la implementación del aprendizaje por competencias y aulas virtuales en las universidades de Perú. **Investigación Operacional**, 43, 43-51.
- [7] DUNCAN, K. A., and WILSON, J. L. (2008). A Multinomial-Dirichlet Model for Analysis of Competing Hypotheses. *Risk Analysis: An International Journal*, 28, 1699-1709.
- [8] ESTRADA-VELAZCO, A., ZULUETA-VÉLIZ, Y., TRILLO, J. R., and CABRERIZO, F. J. (2025). An Approach Based on Granular Computing and 2-Tuple Linguistic Model to Personalize Linguistic Information in Group Decision-Making. **Electronics**, 14, 4698-4698.
- [9] HERRERA, F., and MARTÍNEZ, L. (2002). A 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 8, 746-752.
- [10] IZAH, S. C., SYLVA, L., and HAIT, M. (2023). Cronbach's alpha: A cornerstone in ensuring reliability and validity in environmental health assessment. **ES Energy and Environment**, 23, 1057-1057.
- [11] KENNEDY, I. (2022). Sample size determination in test-retest and Cronbach alpha reliability estimates. **British Journal of Contemporary Education**, 2, 17-29.
- [12] MARTINEZ, L., RUAN, D., and HERRERA, F. (2010). Computing with words in decision support systems: an overview on models and applications. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, 3, 382-395.
- [13] NAJAR, F., and BOUGUILA, N. (2022, January). Sparse generalized dirichlet prior based bayesian multinomial estimation. In **International Conference on Advanced Data Mining and Applications** (pp. 177-191). Cham: Springer International Publishing.
- [14] OTZEN, T., y MANTEROLA, C. (2017). Técnicas de Muestreo sobre una Población a Estudio. **International Journal of Morphology**, 35, 227-232.
- [15] OVIEDO, H. C., y CAMPO-ARIAS, A. (2005). Aproximación al uso del coeficiente alfa de Cronbach. **Revista colombiana de psiquiatría**, 34, 572-580.
- [16] REIMER, T. (2024). Bayesian Inference on Baseball Batting Metrics Using Nested Dirichlet Multinomial Models (Tesis doctoral, **University of Manitoba**). Disponible en el repositorio institucional de la University of Manitoba: <https://mspace.lib.umanitoba.ca>.
- [17] SCHARAGER, J., y REYES, P. (2001). Muestreo no probabilístico. Pontificia Universidad Católica de Chile, **Escuela de Psicología**, 1, 1-3.
- [18] SOLER CÁRDENAS, S. F., y SOLER PONS, L. (2012). Usos del coeficiente alfa de Cronbach en el análisis de instrumentos escritos. **Revista médica electrónica**, 34, 01-06.
- [19] WANG, P. P. (2001). **Computing with words**. New York: John Wiley & Sons, Inc.