FORTHCOMING 11A41-22-01-03

CARACTERIZACIÓN MATEMÁTICA DEL COMPORTAMIENTO FRACTAL ESTADÍSTICO DE LA DISTRIBUCIÓN DE DISTANCIAS ENTRE NÚMEROS PRIMOS CONSECUTIVOS

Javier Oswaldo Rodríguez Velásquez, Signed Esperanza Prieto Bohórquez, Sandra Catalina Correa Herrera, Dharma Rodríguez Correa, Sefirot Rodríguez, Jehoshua Rodríguez, Johanan Rodríguez, Ribká Soracipa Muñoz, Jairo Javier Jattin Balcázar, Esmeralda Guzmán de la Rosa
Grupo Insight. Insight Research Group SAS. Bogotá, Colombia.

ABSTRACT
Research based in number theory, have found that the distribution of prime numbers can be analyzed by a power law, and the distances between consecutive prime numbers from multifractal features. Considering the above, it was seek to determine the statistical fractal dimension of the frequency distribution of the distances between consecutive prime numbers, calculated within the five million natural numbers. For this, the distance between consecutive prime numbers was calculated, which are within the five million natural numbers. The distribution of frequencies of the distances between prime numbers was organized, to evaluate if it had a hyperbolic behavior, to subsequently apply the Zipf-Mandelbrot law, and find the statistical fractal dimension of this distribution. It was found that the distribution of frequencies of the distances between consecutive prime numbers varied between 1 and 32463, the correlation coefficient R^2 was 0.8017 and the fractal dimension 0.2973**.** In this way, the degree of complexity of the frequency of appearance of consecutive distances established from the statistical fractal dimension opens the possibility of finding mathematical orders in the way that prime numbers are distributed.

KEYWORDS: Zipf-Mandelbrot law, prime numbers, statistical fractal dimension.

MSC: 11A41;28A80; 62P35

RESUMEN
Investigaciones diseñadas en la teoría de números, han encontrado que la distribución de los números primos puede ser analizada mediante una ley de potencias, y las distancias entre números primos consecutivos a partir de características multifractales. Por lo anterior, se buscó determinar la dimensión fractal estadística de la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos, calculada dentro de los cinco millones de números naturales. Para ello, fue calculada la distancia entre números primos consecutivos, los cuales se encuentran dentro de los cinco millones de números naturales. Luego, se organizó la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos, para evaluar si tiene un comportamiento hiperbólico, para posteriormente aplicar la ley de Zipf-Mandelbrot, y hallar la dimensión fractal estadística de esta distribución. Se encontró que la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos varió entre 1 y 32463, el coeficiente de correlación fue de R^2 0.8017 y la dimensión fractal de 0.2973. De esta manera, se encontró que el grado de complejidad de la frecuencia de aparición de las distancias consecutivas establecido a partir de la dimensión fractal estadística, abre la posibilidad de encontrar ordenes matemáticos en la manera que se distribuyen los números primos.

PALABRAS CLAVE: ley de Zipf-Mandelbrot, números primos, dimensión fractal estadística.

1. INTRODUCCIÓN

Por muchos siglos los matemáticos buscaron una fórmula mágica que generara la lista de números primos como Gauss, quien adoptó una estrategia fundamentada en una relación que encontró entre los números primos y los logaritmos. Adicionalmente, Gauss buscó comprender si era posible establecer cuantos números primos hay en un rango de números primos menores a N, donde N puede tomar cualquier valor [1]. Por su parte, Mersenne planteó la fórmula 2^n-1 para establecer todos los números primos [2], y aunque se mostró que no todos los números primos pueden hallarse a partir de esta fórmula, hoy en día es utilizada para la buscar números potencialmente primos y para obtener números primos grandes, utilizando para ambos casos ordenadores y matrices [2,3] mediante proyectos como GIMPS o *Great Internet Mersenne Prime Search* [4].
La distribución de los números primos para una determinada posición o secuencia de números enteros continúa siendo un tema de investigación que ha trascendido el campo de las matemáticas [5-9]. Distintas observaciones sobre los números primos grandes ordenados en una secuencia de números enteros, han permitido concluir que estos se distribuyen aparentemente de una manera caótica [6,7]. Como consecuencia de esto, se han realizado estudios que han buscado establecer patrones fractales [7,8] en medio de las irregularidades observadas en la distribución de los números primos [1]. La finalidad de obtener estos patrones es la de encontrar una regla subyacente, cuyo principio organizador, permita descubrir algún tipo de simetrías, entre otras [8,9]. Desde esta perspectiva, se han observado una ley de

potencias en la distribución de números primos, y características multifractales en las distancias entre números primos consecutivos [10].

Hacia 1930, George Kingsley Zipf, estableció una ley empírica que posteriormente fue denominada ley de Zipf, la cual da cuenta de una relación entre la aparición de las palabras más frecuentes de un texto con respecto a su utilización en textos cuando se las ordena de forma descendente [11,12]. Más adelante, Mandelbrot tomó la ley de Zipf, logrando linealizar el comportamiento estadístico, con lo que es posible calcular la dimensión fractal estadística, que es una variable que evalúa el grado de complejidad de un sistema, a partir del inverso de la pendiente de la gráfica [12,13].

En el área de la cardiología, el estudio de la dinámica cardiaca a partir de los trazados cardiotocográficos (CTG) y los registros electrocardiográficos (ECG), ha implicado enfrentarse a comportamientos altamente irregulares y con forma análoga a la de un Zigzag. Estos comportamientos, a simple vista, no permiten predecir estados normales y anormales. En cambio, en estudios diseñados en el contexto de teorías físicas y matemáticas, se ha aplicado la ley de Zipf/Mandelbrot en metodologías que evalúan el grado de complejidad, por ejemplo, de la dinámica cardiaca fetal y de adulto, pudiendo diferenciar la normalidad de la anormalidad aguda cardíaca [14,15]. Similarmente, esta metodología ha logrado caracterizar el comportamiento de epidemias como la malaria [17] y los grupos de medicamentos más relacionados con la presentación de reacciones adversas [18].

Esto sugiere que la ley de Zipf/Mandelbrot, por su variada aplicabilidad entre la física, el lenguaje y las ciencias biomédicas, esta podría ser utilizada para analizar la complejidad de los fenómenos. Después de lo anteriormente expuesto, el propósito es aplicar una metodología diseñada para evaluar la dimensión fractal estadística de la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos calculadas en cinco millones de números naturales, mediante la ley de Zipf/Mandelbrot.

2. METODOLOGÍA

Definiciones

Ley de Zipf/Mandelbrot: es una función de potencia que se define de la siguiente manera [13]:

$$P = F\,(\sigma + V)^{-1/D}$$

Donde D varía entre 0 < D < 1.

Dimensión fractal estadística: se establece después de realizar la respectiva regresión lineal de la ecuación 1, la cual es calculada con la ecuación 2:

$$D = \frac{Log(\sigma + V)}{Log\left(F/P\right)}$$

En donde, D: represente la dimensión fractal; delta (σ) el rango para cada frecuencia, P: es la frecuencia de aparición de la distribución distancias de números primos consecutivos para el cinco millón de números naturales. V se calcula como V=1/*N*-1 donde N es el número de frecuencias medidas; F es un cofactor secundario en la linealización, obtenido a partir de la aplicación del método de mínimos cuadrados.

Procedimiento

Inicialmente, los números primos consecutivos que se encuentran dentro de los cinco millones de números naturales, fueron tomados de Prime Numbers [19]. Posteriormente, se calculó la distancia entre los números primos consecutivos en esta secuencia de números naturales. Así, se analizaron las repeticiones con las cuales una distancia entre números primos consecutivos determinada se presentó. Para ello, se diseñó una tabla de dos columnas: en una se encuentra el resultado de la distancia hallada, y en la otra columna el número de veces que se repitió dicho resultado. Seguidamente, la frecuencia de la distribución de la distancia entre números primos consecutivos calculada, fue ordenada de mayor a menor, asignando a cada una de ellas un número entero, empezando por uno y aumentando en una unidad para las frecuencias de aparición siguientes.

El orden jerárquico de la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos fue graficado con el fin de evaluar si tienen un comportamiento hiperbólico y posteriormente aplicar la ecuación 2. Finalmente se realizó una linealización logarítmica a la gráfica, aplicando para ello el método de mínimos cuadrados, para hallar la dimensión fractal estadística de la frecuencia de la distribución de las distancias entre números primos consecutivos, para evaluar su grado de complejidad.

3. **RESULTADOS**

Los números primos consecutivos analizados que se encuentran dentro de los cinco millones de números naturales son 348 513. La distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos varió entre 1 y 154. El número de veces que se repitió un determinado resultado varió entre 1 y 54 545 (ver tabla 1); estos resultados al ser ordenados de forma jerárquica, es decir de mayor a menor respecto a un rango que va aumentado una unidad en razón a la cantidad de datos organizados, al ser graficados dan como resultado una hipérbole, lo cual permite aplicar la ley de Zipf/Mandelbrot (ver figura 1). La frecuencia relativa de aparición de la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos varió entre 2.87^{-6} y 1.57^{-1}. Tras la linealización se obtuvo como resultado un valor de pendiente de -3.364 con un coeficiente de correlación de R^2 de 0.817, el cual indica que la linealización se ajusta de forma adecuada a los datos reales (ver figura 2) mientras que el valor de la dimensión fractal estadística fue 0.2973.

Tabla 1. Orden jerárquico que se dio a la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos, donde R: es el rango, D: el valor de la distancia, F: la frecuencia que se repitió dicha distancia.

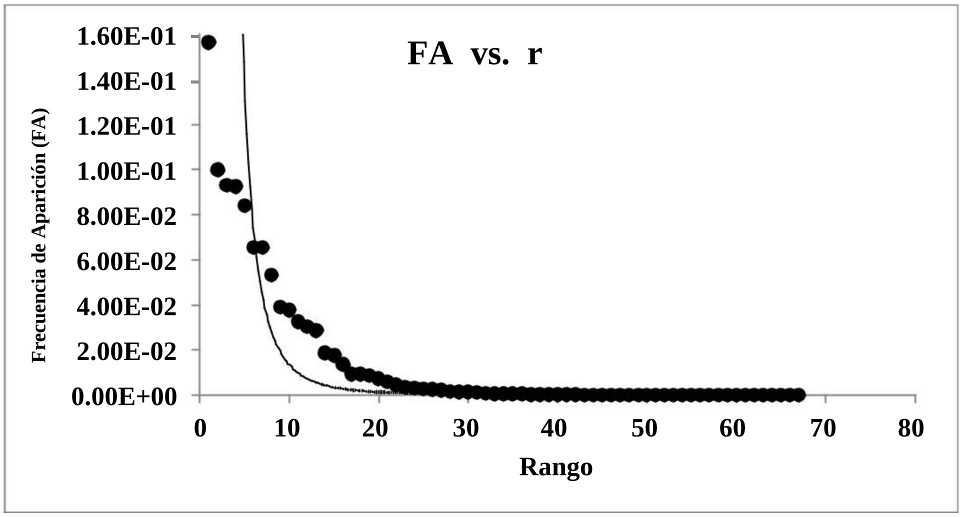
R	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
D	6	12	2	4	10	8	18	14	24	16	20	30	22	28
F	54 545	34 888	32 463	32 307	29 275	22 908	22 842	18 570	13 698	13 135	11 340	10 550	10 008	6 537
R	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**
D	26	36	42	34	32	40	38	48	44	54	46	50	60	52
F	6 153	4 763	3 271	3 257	3 088	2 547	2 073	1 634	1 252	1 048	1 016	894	763	579
R	**29**	**30**	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
D	56	58	66	64	62	70	72	78	68	84	74	76	80	90
F	482	467	394	262	226	218	178	164	139	93	76	75	69	51
R	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
D	82	88	86	96	94	100	102	92	98	104	106	108	110	112
F	40	24	21	21	14	14	12	11	9	8	6	6	6	3
R	**57**	**58**	**59**	**60**	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**	**67**			
D	114	126	132	118	120	1	122	128	138	148	154			
F	3	3	3	2	2	1	1	1	1	1	1			

Tabla 2. Información para hacer la linealización, en donde R es el rango, P es la frecuencia relativa de la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos, V=1/N donde N es el número de datos que en este caso son 67, y Ln(P): logaritmo natural de la frecuencia relativa.

R	P	R+V	LN R+V	LN P	R	P	R+V	LN R+V	LN P
1	1.57E-01	1.0152	0.0150	-1.8546	35	5.11E-04	35.0152	3.5558	-7.5796
2	1.00E-01	2.0152	0.7007	-2.3015	36	4.71E-04	36.0152	3.5839	-7.6616
3	9.31E-02	3.0152	1.1037	-2.3736	37	3.99E-04	37.0152	3.6113	-7.8270
4	9.27E-02	4.0152	1.3901	-2.3784	38	2.67E-04	38.0152	3.6380	-8.2288
5	8.40E-02	5.0152	1.6125	-2.4769	39	2.18E-04	39.0152	3.6640	-8.4307
6	6.57E-02	6.0152	1.7943	-2.7222	40	2.15E-04	40.0152	3.6893	-8.4439
7	6.55E-02	7.0152	1.9481	-2.7251	41	1.98E-04	41.0152	3.7139	-8.5273
8	5.33E-02	8.0152	2.0813	-2.9321	42	1.46E-04	42.0152	3.7380	-8.8296
9	3.93E-02	9.0152	2.1989	-3.2364	43	1.15E-04	43.0152	3.7616	-9.0725
10	3.77E-02	10.0152	2.3041	-3.2784	44	6.89E-05	44.0152	3.7845	-9.5834
11	3.25E-02	11.0152	2.3993	-3.4253	45	6.03E-05	45.0152	3.8070	-9.7169
12	3.03E-02	12.0152	2.4862	-3.4975	46	6.03E-05	46.0152	3.8290	-9.7169
13	2.87E-02	13.0152	2.5661	-3.5503	47	4.02E-05	47.0152	3.8505	-10.1224
14	1.88E-02	14.0152	2.6401	-3.9762	48	4.02E-05	48.0152	3.8715	-10.1224
15	1.77E-02	15.0152	2.7091	-4.0367	49	3.44E-05	49.0152	3.8921	-10.2765
16	1.37E-02	16.0152	2.7735	-4.2928	50	3.16E-05	50.0152	3.9123	-10.3635
17	9.39E-03	17.0152	2.8341	-4.6686	51	2.58E-05	51.0152	3.9321	-10.5642
18	9.35E-03	18.0152	2.8912	-4.6729	52	2.30E-05	52.0152	3.9515	-10.6820
19	8.86E-03	19.0152	2.9452	-4.7261	53	1.72E-05	53.0152	3.9706	-10.9697
20	7.31E-03	20.0152	2.9965	-4.9188	54	1.72E-05	54.0152	3.9893	-10.9697
21	5.95E-03	21.0152	3.0452	-5.1247	55	1.72E-05	55.0152	4.0076	-10.9697
22	4.69E-03	22.0152	3.0917	-5.3626	56	8.61E-06	56.0152	4.0256	-11.6628
23	3.59E-03	23.0152	3.1362	-5.6289	57	8.61E-06	57.0152	4.0433	-11.6628
24	3.01E-03	24.0152	3.1787	-5.8068	58	8.61E-06	58.0152	4.0607	-11.6628
25	2.92E-03	25.0152	3.2195	-5.8378	59	8.61E-06	59.0152	4.0778	-11.6628
26	2.57E-03	26.0152	3.2587	-5.9657	60	5.74E-06	60.0152	4.0946	-12.0683
27	2.19E-03	27.0152	3.2964	-6.1242	61	5.74E-06	61.0152	4.1111	-12.0683

28	1.66E-03	28.0152	3.3327	-6.4001	62	2.87E-06	62.0152	4.1274	-12.7614
29	1.38E-03	29.0152	3.3678	-6.5835	63	2.87E-06	63.0152	4.1434	-12.7614
30	1.34E-03	30.0152	3.4017	-6.6151	64	2.87E-06	64.0152	4.1591	-12.7614
31	1.13E-03	31.0152	3.4345	-6.7851	65	2.87E-06	65.0152	4.1746	-12.7614
32	7.52E-04	32.0152	3.4662	-7.1931	66	2.87E-06	66.0152	4.1899	-12.7614
33	6.48E-04	33.0152	3.4970	-7.3409	67	2.87E-06	67.0152	4.2049	-12.7614
34	6.26E-04	34.0152	3.5268	-7.3769					

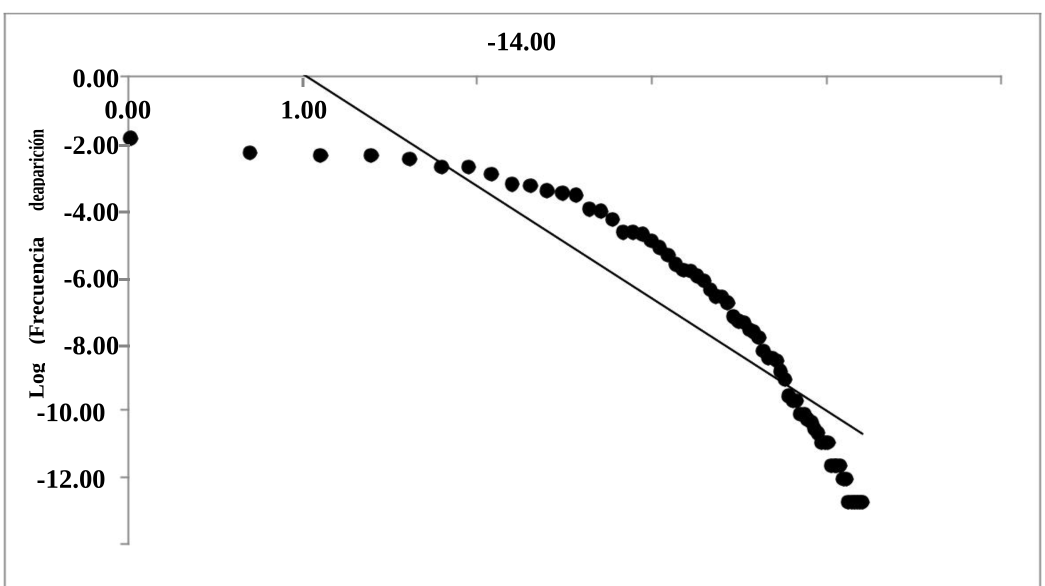
Figura 1. Hipérbole generada a partir del rango y la distribución de frecuencias de las distancias entre números primos consecutivos calculada dentro de los cinco millones de números naturales, valores que se encuentran en la tabla 1.



4. DISCUSIÓN

Esta es la primera investigación en la que se plantea una metodología fundamentada en la ley de Zipf/Mandelbrot para evaluar el grado de complejidad de la distribución de frecuencias de la distancia entre números primos consecutivos. Lo anterior, es fundamentado en una prueba de este método en un espacio acotado con los primeros cinco millones de números naturales, de la cual no hay publicaciones similares en la literatura científica y matemática. Es importante mencionar que la dimensión fractal estadística obtenida en este estudio, después de observar que la distribución de frecuencias de la distancia entre números primos consecutivos tiene un comportamiento hiperbólico, sugiere la existencia de un orden matemático subyacente en la frecuencia de aparición de las distancias entre números primos consecutivos. Por tanto, esta es una propuesta para comprender el comportamiento de los números primos en razón de sus distancias y su distribución entre los números naturales.

Figura 2. Linealización logarítmica de la distribución de las frecuencias de aparición de las distancias entre números primos consecutivos que fueron calculadas para los números primos que se encuentran dentro los cinco millones de números naturales.



Log (rangos)

2.00 **3.00**
4.00
5.00

DF
=
0,2
973
R²
=
0,8
01

La aparente aleatoriedad de los números primos invita a entender este comportamiento como si se tratase de una secuencia aleatoria, analizable desde la teoría de la probabilidad y la estadística [20]. Scafetta et al [21], diseñaron una investigación la cual buscaba establecer las propiedades fractales de las distancias entre primos consecutivos, implementando para ello un método de expansión de intensidad, que permitiera tratar la distribución de probabilidad exponencial no estacionaria hallada en estas distancia, encontrando que la distancia entre números primos consecutivos, el rango de aleatoriedad gaussiana de la secuencia aumenta [17]. En consecuencia, la distribución normal es, método inadecuado para las desviaciones extremas de la media [9].

Se ha planteado por Selvam [9], con respecto a la ley de potencias, que el tamaño de los eventos no tendría límite, por ende, son los eventos de mayor magnitud que dominan el proceso físico subyacente. Desde la teoría de la criticidad organizada, son los cambios de los sistemas de interacción pequeños y ordenados los responsables de las catástrofes naturales y los cambios en el mercado de valores, entre otros. Así, esta teoría plantea que los sistemas compuestos evolucionan de manera natural a un estado crítico [21-23]. En cambio, se ha propuesto por medio de la evaluación del grado de complejidad a partir de la ley de Zipf/Mandelbrot, que los sistemas pueden tener complejidades que pueden ser cuantificadas.

Lo anterior, es el caso de investigaciones en las cuales se evaluó el grado de complejidad del repertorio T específico contra el alérgeno poa P9 en un paciente alérgico [24] al igual que el grado de complejidad de la epidemia del dengue en Colombia [17], las infecciones asociadas al cuidado de la salud [25] y la tasa de incidencia de reacciones adversas a medicamentos y problemas relacionados con medicamentos en adultos mayores [18]. Estos estudios demuestran que son múltiples los escenarios con complejidades variables y de los que su complejidad puede valorarse de una manera netamente cuantitativa.

AGRADECIMIENTOS

El presente resultado hace parte de los productos del proyecto INV 2288 financiado por la Universidad Cooperativa de Colombia. Agradecemos de manera especial a la Dra. Eva Prada, Directora de la Sede Bogotá, a los Doctores Leonardo Galindo, Director Nacional de Investigación, Andrés Mena, Director de Investigaciones Sede Bogotá, y a la Dra. María José Villalobos Castro, Decana de la Facultad de Odontología. Un agradecimiento especial a las docentes de la facultad de Odontología María Alejandra González y Adiela Ruiz, por su apoyo al grupo InsightExtendemos nuestros agradecimientos al Insight Research Group SAS.Un agradecimiento especial para Marcus Du Sautoy pues en su libro encontramos la música de los números primos sin lo cual no se hubiera desarrollado este trabajo.

RECEIVED: JANUARY, 2022.
REVISED: MAY, 2022.

REFERENCIAS

[1] BAK, P. and CHEN, K. (1991): **Self-Organized Criticality. Scientific American**. 264, 46-53.

[2] BAK, P. and PACZUSKI, M. (1995): **Complexity, contingency, and criticality. Proc. Natl. Acad. Sci. USA.** 92:6689-6696.

[3] BAK, P., TANG, C.H. and WIESENFELD, K. (1987): Self-Organized Criticality: An Explanation of 1/f Noise. **Physical Review Letters**. 59, 381-384.

[4] BURGOS J. (1996): Zipf-scaling behavior in the immune system. B**iosystems**. 39: 227-232.

[5] CATTANI, C. (2010): **Fractal patterns in prime numbers distribution**. Lect. Notes Comput. Sci. 6017: 164–176.

[6] DU SAUTOY, M. (2003): **The music of the primes. Searching to solve the greatest mystery in mathematics**. Harper-Collins Publishers, New York.

[7] HOQUE, A. and SAIKIA, H. (2014): On generalized Mersenne prime. **SeMA Journal**. 66, 1-7.

[8] KAISER, J. (2016): On the relationship between the Collatz conjecture and Mersenne prime numbers. 1-31. Disponible en: https**://arxiv.org/pdf/1608.00862**.pdf

[9] KENDAL, W. and JØRGENSEN, B. (2015): A Scale Invariant Distribution of the Prime Numbers. **Computation.** 3, 528-540**.**

[10] MONTEMURRO, M. (2001): Beyond the Zipf–Mandelbrot law in quantitative linguistics. **Physica A**. 300, 567– 578.

[11] RODRIGUEZ, J. (2005): Comportamiento fractal del repertorio T específico contra el alérgeno Poa P9. **Rev Fac Med Univ Nac Colomb**. 53, 72-78.

[12] RODRIGUEZ, J., PRIETO, S., CORREA, C., CHAVES, N., HOYOS, N., VALERO, L., SUAREZ, D., ARAGON, L., SOTO, D. and SANTACRUZ, F. (2016): Ley de Zipf/Mandelbrot y teoría de la probabilidad aplicadas a la caracterización de reacciones adversas a medicamentos en adultos mayores. **Revista Lasallista De Investigación .**13**,** 27-34.

[13] RODRIGUEZ, J., PRIETO, S., CORREA, C., MENDOZA, F., WEISZ, G., SORACIPA, M., VELÁSQUEZ, N., PARDO, J., MARTINEZ, M. and BARRIOS, F. (2015): Physical mathematical evaluation of the cardiac dynamic applying the Zipf – Mandelbrot law. **Journal of Modern of Physics**. 6, 1881-1888.

[14] RODRIGUEZ, J., PRIETO, S., CORREA, C., RODRIGUEZ, J.M., LEYVA, A., VALERO, O., CHAVES, N., SORACIPA, Y., VELASCO, A. and RUEDA, F. (2016): Comportamiento fractal estadístico de la dinámica de epidemia de dengue en Palmira, Valle del Cauca, Colombia. 2001-2004. **Rev. Fac. Med**. 64, 629-635.

[15] RODRIGUEZ, J., PRIETO, S., CORREA, C., SORACIPA, Y., CHAVES, N., NARVAEZ, A.J., MOJICA, J., AGUILERA, M., TAPIA, D. and JATTIN, J. (2018): Comportamiento fractal de infecciones asociadas al cuidado de la salud en el Hospital de Meissen ESE II Nivel, para los años 2011, 2012 y 2013. **Infectio**. 22, 70-75

[16] RODRIGUEZ, J., PRIETO, S., ORTIZ, L., BAUTISTA, A., BERNAL, P. and AVILÁN N. (2006): Diagnóstico Matemático de la Monitoria Fetal aplicando la ley de Zipf/Mandelbrot. **Rev Fac Med Univ Nac Colomb**. 54, 96-107.

[17] SCAFETTA, N., IMHOLT, T., ROBERTS, J.A. and WEST, B.J. (2004): An intensity-expansion method to treat non-stationary time series: an application to the distance between prime numbers. **Chaos, Solitons & Fractals**: 20, 119-125.

[18] SELVAM, A. (2014): Universal characteristics of fractal fluctuations in prime number distribution. **International Journal of General System. 43(8): 828–863. en:** http://dx.doi.org/10.1080/03081079.2014.913040

[19] TAO, T. (2011): **Structure and Randomness in the Prime Numbers**. Springer, Berlin, Heidelberg.

[20] UGOCHUKWU, L. (2004): Matemáticas amenas. Editorial Universidad de Antioquia, Colombia.

[21] WELLS, D. (2005): **Prime Numbers: The Most Mysterious Figures in Math**. NJ: Wiley, Hoboken

[22] WOLF, M. (2014): Nearest-neighbor-spacing distribution of prime numbers and quantum chaos. Physical Review E. 89(2): 022922.

[23] WOLF, M. (1997): $1/f$ Noise in the Distribution of Prime Numbers. **Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications.** 241, 493–499.

[24] ZIPF, G. (1949): **Human behavior and the principle of least effort: An introduction to human ecology**. Addison-Wesley, Cambridge.