

COMPARACIÓN DE TRES MODELOS ESTOCÁSTICOS PARA CALCULAR UN ÍNDICE DE PÉRDIDAS DESENCADENANTE DE LOS CAT BONDS

María José Pérez-Fructuoso¹

Departamento de Economía y Administración de Empresas

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Madrid Open University (UDIMA)

ABSTRACT

This article synthesizes the main results of three alternative proposals to model the reported claims amount (which performs as Cat Bonds' catastrophic loss indexes numerator). Firstly, considering that the claims declaration's rate is constant. Secondly, considering that the claims declaration's rate is asymptotic. And thirdly, considering that such rate follows an Ornstein-Uhlenbeck process. Each one of these three models' validity is studied by estimating its respective fundamental parameters and verifying, based on both the predictions and the errors' study, which one of them best fits to the dataset of a series of floods that occurred in Spain. All the aforementioned developments will lead to conclude that, in the light of the data available, the Ornstein-Uhlenbeck model is the one that best represents the claims declaration's process.

KEYWORDS: reported claims amount, incurred but not yet reported claims amount, geometric Brownian motion, asymptotic claims reporting rate, Ornstein-Uhlenbeck process, root mean squared error

MSC: 60G15, 62P05

RESUMEN

Este artículo sintetiza los principales resultados de tres propuestas alternativas para modelar la cuantía declarada de siniestros, numerador del índice de pérdidas catastróficas de los bonos sobre catástrofes: suponiendo que la tasa de declaración de siniestros es constante, asintótica o considerando que sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. Se estudia la validez de estos modelos estimando sus parámetros fundamentales y comprobando, a partir de las predicciones y del estudio de los errores cuál de ellos se ajusta mejor a los datos sobre una serie de inundaciones ocurridas en España. Y se concluye que, para los datos disponibles, el modelo de Ornstein-Uhlenbeck es el que mejor representa el proceso de declaración de siniestros.

PALABRAS CLAVE: cuantía de siniestros declarada, cuantía de siniestros pendiente de declarar, movimiento Browniano geométrico, tasa de declaración de siniestros asintótica, proceso de Ornstein-Uhlenbeck, raíz del error cuadrático medio.

1. INTRODUCCIÓN

Desde mediados del siglo pasado se ha observado una tendencia creciente en la repercusión de las catástrofes naturales tales como huracanes, terremotos o inundaciones, entre otras. Esto se debe a diversos factores en su mayor parte causados por el hombre. En efecto, parece evidente que el cambio climático está aumentando la frecuencia de las catástrofes, pero este no es el único problema que tenemos que afrontar. El aumento de la población mundial se está convirtiendo en un proceso incontrolable y desorganizado que provoca que la mayor parte de la misma viva en áreas densamente urbanizadas. Todos estos hechos suponen que cuando ocurre una catástrofe, las consecuencias para el mundo son cada vez más severas tanto en términos de vidas humanas como en términos de pérdidas económicas. Solo en 2020, los diez desastres climáticos con mayor coste alcanzaron un total de 123 millones de euros en daños asegurados y se cobraron la vida de 3500 personas.

Antes de 1992, cuando se producía una catástrofe, la compañía aseguradora asumía el coste de todos los daños causados por la misma. Sin embargo, ese año se produjeron una serie de grandes catástrofes en un corto período de tiempo, que colapsaron el sistema provocando la imposibilidad de cobertura del sistema convencional de seguros de eventos catastróficos. En ese momento el Chicago Board of Trade (CBOT) lanzó al mercado instrumentos financieros derivados conocidos como futuros CAT y opciones CAT y cuyo subyacente era un índice de siniestralidad catastrófica, que permitieron a las aseguradoras asumir nuevamente el riesgo de eventos catastróficos y reasegurar los daños que ocasionan las catástrofes. Estos

¹ mariajose.perez@udima.es

derivados basados en los mercados de capital han ido evolucionando hasta la actualidad siendo las emisiones de CAT bonds o bonos sobre catástrofes una de las formas de *securitization* que más ha desarrollado y utilizado el mercado asegurador en los últimos años. De hecho, desde 1997 el mercado de bonos catastróficos ha ido creciendo tanto en tamaño como en formas de cobertura de los distintos tipos de desastres naturales que cada vez son más frecuentes y tienen mayores consecuencias económicas [30]. Los Cat bonds son instrumentos de deuda que proporcionan a la industria aseguradora acceso a una nueva fuente de cobertura del riesgo a través de los mercados de capital con una elevada rentabilidad y aunque su estructura es similar a la de los bonos tradicionales, sus resultados están condicionados a la ocurrencia de un determinado suceso desencadenante cuyos parámetros quedan fijados en el momento de la emisión [24]. En su mayor parte, los bonos catastróficos son patrocinados por compañías de seguros y reaseguradoras que ceden a un *Special Purpose Vehicle* (SPV) una parte o la totalidad de su riesgo catastrófico de suscripción. A cambio, el SPV contrata una póliza de reaseguro convencional con el patrocinador y busca financiación (emitiendo bonos) en el mercado de capital, que a su vez actúa como contrapartida del acuerdo de reaseguro pactado. Los flujos obtenidos con la emisión del bono y la prima pagada por la cedente en concepto de precio del reaseguro, son invertidos por el SPV en activos a corto plazo con elevada rentabilidad que se depositan en una cuenta colateral, que garantiza la transacción y genera recursos suficientes para cubrir los riesgos asumidos en el contrato de reaseguro y afrontar el pago de cupones prometido a los inversores por el importe prestado con la compra de los bonos. Los beneficios reales generados en esta cuenta son intercambiados por el LIBOR, con una contrapartida de swap altamente valorada por las agencias de rating. A través de este mecanismo de swap, los bonos se convierten en títulos con tipos flotantes de forma que el riesgo de tipo de interés es eliminado, en su mayor parte. Durante la vida del bono, los intereses periódicos pagados por la SPV a los inversores se obtienen de la combinación de dos componentes: las primas pagadas por el patrocinador en concepto de cobertura de reaseguro y la rentabilidad LIBOR generada por el principal del bono, la cual está garantizada por la contrapartida del swap. Entonces, al finalizar la vida del bono, si no se produce el siniestro cubierto por el contrato, el principal es devuelto a los inversores de igual forma que ocurre con otras inversiones de renta fija. Sin embargo, si se produce el siniestro desencadenante del bono, dependiendo de la estructura del mismo y del contrato de reaseguro, los inversores perderán los intereses y el principal de la inversión o parte de ellos. La estructura con que se emiten los bonos catastróficos depende de cómo se lleve cabo la cobertura del riesgo y, por tanto, la indemnización que recibe la compañía cedente que patrocina el bono. En general, existen distintos tipos desencadenantes en un Cat bond, pero uno de los más utilizados por la industria aseguradora es el de índice pérdidas [32].

Muchos autores se han ocupado de modelar estos desencadenantes de índices de pérdidas con el objetivo de desarrollar nuevas formas de valoración de estos instrumentos financieros y dar cobertura de esa forma a los eventos catastróficos. Por mencionar los más significativos Cumins y Geman (1995) modelaron el índice de pérdidas como la suma de las declaraciones asociadas a cada catástrofe y utilizaron para ello un movimiento browniano geométrico que representa la aleatoriedad del proceso de declaración, y un proceso de Poisson que incorpora los saltos en la declaración, producidos por la ocurrencia de nuevas catástrofes. Posteriormente, Geman y Yor (1997), desarrollaron un modelo similar al anterior con la diferencia de que el proceso de difusión con saltos se utilizó para modelar directamente el índice de pérdidas. Aase (1999) y Aase (2001) modela el índice de pérdidas con un proceso de Poisson compuesto con saltos aleatorios. Este modelo es un caso particular del desarrollado por Embrechts y Meister (1997), que modeliza el comportamiento del índice a través de una mixtura de procesos de Poisson compuestos y una frecuencia de siniestralidad aleatoria. Baryshnikov, Mayo y Taylor (2001), proponen, bajo las hipótesis de negociación continua y neutralidad frente al riesgo, una forma de cálculo del precio del bono catastrófico basada en un proceso de Poisson compuesto doble con el objetivo de capturar las diferentes características de la dinámica de las catástrofes. Burnecki y Kukla (2003) aplican los resultados obtenidos por Baryshnikov, Mayo y Taylor (2001) para calcular el precio de bonos sobre catástrofes cupón cero y con cupones. Muermann (2003) utiliza la modelación del índice de pérdidas desarrollado por Aase (1999) para valorar en términos actuariales las opciones y futuros catastróficos del CBOT (Chicago Board of Trade). Loubergé et al. (1999) calculan el precio de un bono con desencadenante de índices de pérdidas aplicando el modelo de valoración de opciones sobre catástrofes desarrollado por Cummins y Geman (1995). Lee y Yu (2002) desarrollan un modelo para valorar CAT bonds a través de un movimiento geométrico browniano pero incorporando en dicha valoración el riesgo de crédito, el azar moral y el riesgo de base. Burnecki (2005) valora bonos sobre catástrofes utilizando procesos de Poisson no homogéneos con distribución de pérdidas truncada por la izquierda. Biagini, Bregman y Meyer-Brandis (2008) valoran opciones sobre riesgos catastróficos y describen el índice mediante un proceso de Poisson compuesto no homogéneo para el período de pérdidas y utilizan un proceso de Levy exponencial no homogéneo para reestimar dicho índice durante el periodo de desarrollo y hasta el vencimiento. Cox y

Pedersen (2000) establecen una estructura temporal de tipos de interés y una estructura de probabilidades de ocurrencia de catástrofes para definir un modelo de tarificación del precio de un bono en mercado incompletos. Como una extensión de este modelo, Shao, Pantelous y Papaioannou (2015) determinan el proceso de tarificación de los Cat Bonds desarrollando una modelización en tiempo discreto con múltiples catástrofes y riesgos financieros de forma que utilizan la teoría del valor extremo para representar los terremotos de máxima severidad, un modelo ARIMA clásico para determinar los tipos de interés y las tasas de inflación y un modelo de Cox-Ingersoll-Ross (modelo CIR) para representar el proceso estocástico de los pagos de cupones del bono en función de un determinado tipo LIBOR anual. En esta línea, Jaimungal y Wang (2006) determinan el precio de las opciones de venta catastróficas considerando tipos de interés estocásticos y pérdidas modeladas a través un proceso de Poisson compuesto correlacionado con el proceso de difusión seguido por el precio del activo derivado. Para valorar estas opciones, Wang (2016) utiliza un proceso de Poisson doblemente compuesto con intensidad lognormal, para describir las pérdidas por catástrofes acumuladas, y volatilidad estocástica. Nowak y Romaniuk (2013) aplican modelos de ETTI suponiendo que la ocurrencia de la catástrofe no depende del comportamiento de los mercados financieros. Zong-Gang y Chao-Qun (2013) utilizan tipos de interés estocásticos para describir las pérdidas catastróficas a través de un proceso de Poisson compuesto no homogéneo. Alegre, Pérez-Fructuoso y Devolver (2003) ajustaron la declaración de siniestros a un proceso estocástico discreto de variables de Bernoulli y lo extendieron a un modelo continuo con tasa de declaración de siniestros constante. Lee y Yu (2007) elaboran un entorno contingente de reclamaciones para valorar un contrato de reaseguro y analizar como el uso de bonos catastróficos aumenta el valor de dicho contrato y reduce el riesgo de crédito. Egami y Young (2008) calculan el precio de indiferencia de un bono catastrófico con una función de utilidad exponencial. Wang (2004) propone una clase de funciones de distorsión que utiliza para calcular la prima de los Cat bonds como medidas de riesgo coherentes. Unger (2010) propone un enfoque discreto de modelización de bonos sobre catástrofes y resuelve la ecuación en derivadas parciales resultante de dicha modelización mediante una aproximación numérica. Chang, Chang y Lu (2010) proponen un modelo binomial doble para representar el momento en el que se producen las declaraciones y las pérdidas para realizar una valoración neutral al riesgo de opciones asiáticas catastróficas. Braun (2011), propone un modelo de tarificación de swaps catastróficos representando la ocurrencia de catástrofes a través de un proceso de Poisson doblemente estocástico (o proceso de Cox) con una intensidad de Ornstein-Uhlenbeck de regresión a la media. Lai, Parcollet y Lamond (2014) calculan el precio de un bono sobre catástrofes a partir de un proceso de difusión con saltos que representa las catástrofes, de un proceso estocástico tridimensional para representar el tipo de cambio, los tipos de interés nacionales y extranjeros, y el coste de cobertura del riesgo de tipo de cambio. Finalmente, Pérez-Fructuoso (2008) y Pérez-Fructuoso (2009) desarrolla un nuevo modelo para el cálculo del índice de pérdidas por catástrofes, cuyo valor es la suma de la cuantía de los siniestros declarada en cada evento. Esta variable se calcula como la diferencia entre la cuantía total de la catástrofe y la cuantía de reclamaciones incurrida pero aún no declarada, variable fundamental del modelo, que se considera impulsada por un movimiento browniano geométrico con tasa de declaración de siniestros constante. Con el objetivo de desarrollar una expresión más precisa del índice de pérdidas catastróficas Pérez-Fructuoso (2016) desarrolla un modelo alternativo cuya hipótesis central se basa en suponer un decrecimiento temporal de esta última cuantía, proporcional a una función exponencial, denominada tasa de declaración de siniestros asintótica. La dinámica de este decrecimiento se representa a través de un movimiento browniano geométrico. Finalmente, y con el mismo objetivo que en el caso anterior, Pérez-Fructuoso (2017), modeliza la dinámica lineal decreciente de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, mediante un proceso browniano aditivo o proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

En este trabajo se realiza una comparación de los tres modelos propuestos por Pérez-Fructuoso (ver [26], [27], [28] y [29]) para determinar, a partir de las predicciones y del análisis de los errores, cuál de ellos se ajusta mejor a los datos disponibles sobre un conjunto de inundaciones ocurridas en diferentes localidades españolas propensas a sufrir este tipo de eventos. Para ello, tras esta introducción, en la sección 2 se establecen las principales ecuaciones que rigen los modelos propuestos. Seguidamente, la sección 3 presenta los resultados obtenidos con la estimación de los parámetros en cada uno de los modelos presentados, para pasar, en la sección 4 a realizar las predicciones y calcular los errores cometidos en las mismas respecto a los datos originales. Finalmente, la sección 5 presenta las principales conclusiones alcanzadas en el trabajo.

2. PRINCIPALES RESULTADOS DE LOS MODELOS PROPUESTOS

En esta sección se presentan los tres modelos estocásticos de determinación de las pérdidas por catástrofes que son objeto de comparación en cuanto a mejores resultados en el ajuste a los datos disponibles.

2.1. Modelo original

El modelo propuesto por [26] y [27] supone que la cuantía de la catástrofe ocurrida en el momento $t = 0$, K , es una variable aleatoria definida como la suma de dos variables, ambas referidas al momento de valoración t ,

$$K = S(t) + R(t) \quad (1)$$

donde $S(t)$ es la cuantía declarada de siniestros (Reported Claims, RC) y $R(t)$ la cuantía de siniestros pendiente de declarar (Incurred But Not Reported Claims, IBNRC).

A partir de la evidencia empírica se considera que, inmediatamente después de la ocurrencia de la catástrofe, la intensidad de la declaración de siniestros es elevada y decrece con el tiempo hasta anularse cuando no quedan más siniestros por declarar. Este hecho se representa mediante la ecuación diferencial,

$$dS(t) = \alpha R(t) dt \quad (2)$$

en la que α es una constante denominada *tasa instantánea de declaración de siniestros*.

Diferenciando la ecuación (1) y substituyendo el resultado en la ecuación (2) se obtiene la ecuación diferencial cierta que describe la evolución de $R(t)$ variable fundamental en la formalización del modelo:

$$dR(t) = -\alpha R(t) dt \quad (3)$$

La irregularidad del proceso de declaración de siniestros se introduce en el modelo a través un proceso de Wiener en la ecuación (3). Esta irregularidad depende de la cuantía de siniestros pendiente de declarar, esto es, mientras dicha cuantía es elevada, la irregularidad en las declaraciones también lo es y decrece a medida que los hace la IBNRC. Para reflejar este comportamiento, se introduce en el modelo determinista un proceso de Wiener con intensidad $\sigma R(t)$, lo cual se conoce con el nombre de movimiento Browniano geométrico. El resultado es la siguiente ecuación diferencial estocástica,

$$dR(t) = -\alpha R(t) dt + \sigma R(t) dW_t \quad (4)$$

con las siguientes condiciones de contorno:

- Si $t = 0$, entonces $R(0) = K$, en el momento en que ocurre la catástrofe, toda su cuantía está pendiente de declarar, y por tanto no hay nada declarado todavía.
- Si $t \rightarrow \infty$, entonces $R(t) = 0$, transcurrido un tiempo lo suficientemente grande todos los daños han sido declarados y por tanto ya no quedan siniestros pendientes de declarar.

La ecuación central de este modelo es (4). Dicha ecuación reproduce el proceso de declaración de siniestros de una catástrofe siendo α la tendencia del proceso, σ el valor constante que representa la volatilidad del proceso y W_t un proceso de Wiener estándar asociado a la catástrofe.

Para obtener la solución de la ecuación (4) es necesario aplicar el lema de Itô (ver [22]), y teniendo en cuenta la condición de contorno inicial $R(0) = K$, dicha solución resulta:

$$R(t) = K e^{-(\alpha + \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \quad (5)$$

La variable $R(t)$ sigue una distribución log-normal, por tanto, la variable $\ln R(t)$ seguirá una distribución normal de parámetros (ver [17]):

$$\ln R(t) \sim N \left(\ln K - \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2} \right) t; \sigma \sqrt{t} \right) \quad (6)$$

2.2. Modelo asintótico

El objetivo de este modelo propuesto por [27] es encontrar una aproximación más precisa para la tasa de declaración de siniestros. A partir de la evidencia empírica se constata que el ritmo de las declaraciones de siniestros es mayor en los primeros días después de haber ocurrido la catástrofe, lo que da lugar a una mayor disminución de la cuantía de siniestros pendientes de declarar y, consecuentemente, un mayor crecimiento de la cuantía de siniestros declarada. Con el tiempo, este ritmo de declaración tiende a estabilizarse en un determinado valor hasta el final del proceso de declaración. Por ello, en lugar de considerar que dicha tasa es constante como en el modelo original, se supone que tiende a un valor constante. En concreto, al inicio del proceso toma el valor cero para, posteriormente, crecer hasta alcanzar el valor constante. De esta forma la tasa de declaración de siniestros α se convierte en la siguiente función exponencial que depende del tiempo,

$$\alpha_t = \gamma (1 - e^{-\beta t}) \quad (7)$$

con $\gamma > 0$ y $\beta > 0$ y tiende al valor constante γ cuando $t \rightarrow \infty$.

Entonces, substituyendo (7) en la ecuación del modelo original (4) obtenemos la ecuación diferencial estocástica que gobierna este modelo:

$$dR(t) = -\alpha_t R(t)dt + \sigma R(t)dW_t = -\gamma(1 - e^{-\beta t})R(t)dt + \sigma R(t)dW_t \quad (8)$$

Para resolver la ecuación (8), aplicamos el cálculo de Itô en la función $f(Z_t) = \ln(Z_t)$ y el proceso de Itô, resultando:

$$R(t) = Ke^{-(\gamma + \frac{\sigma^2}{2})t + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \sigma W_t} \quad (9)$$

Finalmente, como en el modelo original, $R(t)$ sigue una distribución log-normal y, por tanto, su logaritmo neperiano sigue una distribución normal de parámetros:

$$\ln R(t) \sim N\left(\ln K - \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta t}); \sigma^2 t\right) \quad (10)$$

2.3. Modelo de Ornstein-Ulhenbeck

En el modelo original dado en la ecuación (4), cuando se agrega la irregularidad del comportamiento de las declaraciones en el tiempo, se asume que su intensidad es proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar, $\sigma R(t)$, y se incorpora un movimiento browniano geométrico para capturar este hecho. Sin embargo, a partir de la evidencia empírica es factible pensar que ésta no es la mejor manera de capturar la volatilidad en el modelo, y proponer una forma alternativa de incorporarla.

En este modelo, desarrollado por [28], se supone que la intensidad de la irregularidad en la declaración de los siniestros es constante en el tiempo y no depende de la cuantía de siniestros pendiente de declarar.

Para reflejar esta circunstancia en el modelo, se utiliza un movimiento browniano aritmético en lugar de uno geométrico que se agrega a la ecuación (3) a través de un proceso de Wiener obteniendo la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dR(t) = -\alpha R(t)dt + \sigma dW_t \quad (11)$$

Este tipo de procesos se denominan procesos de Ornstein-Ulhenbeck (OU) y son procesos gaussianos. Se resuelven aplicando el cálculo de Itô a la ecuación (11) aunque no se obtenga una expresión cerrada para la integral de dW_t y, por tanto, tampoco para $R(t)$ cuyo valor resulta:

$$R(t) = Ke^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{-\alpha s} dW_s \quad (12)$$

En este caso $R(t)$ es un proceso gaussiano de parámetros:

$$R(t) \sim N\left(Ke^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right) \quad (13)$$

3. ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DE LOS MODELOS PROPUESTOS

Para comprobar la validez de los modelos descritos en la sección anterior, se realiza a continuación, una estimación de todos los parámetros que en ellos intervienen a partir de series de datos temporales sobre el porcentaje de la cuantía de los siniestros pendiente de declarar (IBNRC), acumulado semanalmente, correspondiente a las siguientes seis inundaciones ocurridas en España: Alcira (1 de octubre de 1991), Barcelona (14 de septiembre de 1999), Valencia (20 de octubre de 2000), Murcia (20 de octubre de 2000), Zaragoza (20 de octubre de 2000) y San Sebastián (23 de junio de 1992).

Tabla 1: Datos de las 6 inundaciones ocurridas en España

Semana	Alcira	Barcelona	Valencia	Murcia	Zaragoza	San Sebastián
0	100	100	100	100	100	100
1	84,94	90,68	97,54	88,46	60,11	88,08
2	53,65	68,38	80,18	75,55	56,91	36,04
3	34,96	50,68	60,15	48,7	38,3	23,67
4	24,05	41,42	43,16	31,13	29,79	16,68
5	18,86	31,58	31,96	21,411	23,4	12,29
6	13,36	25,43	27,55	5,78	19,15	9,94
7	10,53	19,56	19,64	11,27	18,09	8,72
8	8,04	16,68	15,29	8,71	15,43	7,76
9	6,94	13,28	14,76	8,24	15,43	6,8
10	5,23	10,54	14,7	6,57	10,64	5,78
11	4,08	8,15	11,06	5,36	6,91	5,18
12	3,71	6,8	8,46	4	3,72	4,33
13	3,56	6,13	6,98	3,38	3,72	3,45
14	2,6	3,41	6,21	2,6	2,66	2,69

15	1,75	3,41	5,17	2,8	2,66	1,81
16	1,3	2,61	4,22	2,29	1,6	1,59
17	0,77	1,81	3,5	2,25	1,6	1,39
18	0,29	1,26	2,72	2,14	1,6	1,16
19	0	0,56	2,26	1,67	0	0,96
20		0	1,88	1,28		0,76
21			1,69	1,09		0,45
22			1,61	0,93		0,28
23			0,9	0,66		0,2
24			0,54	0,66		0,17
25			0,36	0,62		0,11
26			0,19	0,16		0,06
27			0	0		0

Estos datos disponibles han sido elaborados por el departamento Técnico y de Reaseguro del Consorcio de Compensación de Seguros (entidad pública dependiente del Ministerio de Asuntos Económicos y Transición Digital de España) para aplicar exclusivamente en esta investigación. La forma en que se presentan los datos, en porcentaje sobre la cuantía total declarada semanalmente, hace que no afecte el paso del tiempo en los mismos. Esto es, así expresados los datos permiten evitar la brecha temporal para su uso en diferentes momentos del tiempo. La cuantía de la catástrofe analizada podría ser mayor en la actualidad, pero el porcentaje declarado en la primera semana seguiría siendo aproximadamente el mismo (fundamentalmente porque en la mayoría de los casos, la población, las infraestructuras públicas y las viviendas no se han visto prácticamente modificadas en las zonas afectadas, después de la reconstrucción).

3.1. Modelo original

El modelo original se rige por la ecuación (5) en la que $R(t)$ sigue una distribución logarítmico normal. Por lo tanto, $\ln R(t)$ es el proceso gaussiano siguiente:

$$\ln R(t) \sim N\left(\ln K - \left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right)t; \sigma^2 t\right)$$

Sin embargo, como se explica en [26] y [27], utilizando la expresión,

$$X(t) = -\ln \frac{R(t)}{R(t-1)} = \left(\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma W_1\right) \sim N\left(\left(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}\right); \sigma^2\right) \quad (14)$$

es posible encontrar más fácilmente los estimadores $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\sigma}$ del modelo. En este caso se va a utilizar el método de máximo verosimilitud para la obtención de dichos estimadores ya que la media de $X(t)$ no depende de t , por lo que es posible encontrar una fórmula analítica con la que calcularlos de forma simple.

Así, si n es el número de datos de catástrofes, la función de máxima verosimilitud resulta,

$$L(\alpha, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n \left(X(i) - \alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

y los estimadores MV se obtienen aplicando la función logarítmica a la función de máxima verosimilitud, derivando e igualando a cero. Los estimadores son,

$$\hat{\alpha}_{MV} = \bar{X} - \frac{\hat{\sigma}_{MV}^2}{2}$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X(i) - \bar{X})^2$$

donde \bar{X} es la media muestral y $\hat{\sigma}_{MV}^2$ es la varianza muestral. No obstante, la varianza muestral es un estimador sesgado de la varianza poblacional por lo que utilizaremos como estimador en este caso la cuasi-varianza que es un estimador insesgado. Por tanto, los estimadores que se van a utilizar en este modelo finalmente son:

$$\hat{\sigma}_s^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X(i) - \bar{X})^2 \quad (15)$$

$$\hat{\alpha}_{MV} = \bar{X} - \frac{s^2}{2} \quad (16)$$

Con los datos disponibles en la **Tabla 1**, calculamos la media muestral para cada inundación. Una vez tenemos la media muestral \bar{X} , calculamos la cuasi-varianza $\hat{\sigma}_s^2$ con la ecuación (15) y finalmente utilizando la media muestral y la cuasi-varianza, calculamos $\hat{\alpha}_{EMV}$ con la ecuación (16). En la **Tabla 2** encontramos los resultados de estos estimadores para las seis inundaciones:

Tabla 2: Valores de los estimadores para el modelo Original

	\bar{X}	$\hat{\sigma}_s^2$	$\hat{\alpha}_{EMV}$
Alcira	0.324613586	0.0422098269	0.3035086722
Barcelona	0.27289414	0.0311010319	0.2573436251
Valencia	0.24099621	0.0257693877	0.2281115136
Murcia	0.24760583	0.0687540979	0.2132287838
Zaragoza	0.22973148	0.0434054683	0.2080287412
San Sebastián	0.28533003	0.0351605321	0.2677497687

3.2. Modelo asintótico

El modelo asintótico se rige por la ecuación (9) y $\ln R(t)$ sigue el siguiente proceso Gaussiano:

$$\ln R(t) \sim N\left(\ln K - \left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta t}); \sigma^2 t\right)$$

Siguiendo la metodología desarrollada en [26] calculamos los estimadores a partir de la expresión:

$$X(t) = -\ln \frac{R(t)}{R(t-1)} = \left(\left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma}{\beta}(e^\beta - 1)e^{-\beta t}\right) + \sigma W_1\right) \sim N\left(\left(\gamma + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma}{\beta}(e^\beta - 1)e^{-\beta t}\right); \sigma^2\right) \quad (17)$$

El estimador de la varianza es la cuasi-varianza que hemos definido y utilizado en el modelo original como:

$$\hat{\sigma}_s^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X(i) - \bar{X})^2$$

Sin embargo, en este caso, para estimar la media de $X(t)$ no es posible utilizar el estimador máximo-verosímil porque dicha media no es un valor constante. $X(t)$ es un proceso Gaussiano y su media es la siguiente función dependiente del tiempo (time-dependent):

$$\mathbb{E}(X(t)|t) = \gamma + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\gamma}{\beta}(e^\beta - 1)e^{-\beta t}$$

Por ello, la estimación de γ y β se lleva a cabo por el método de mínimos cuadrados ordinarios (MCO), minimizando la función,

$$f(\gamma, \beta) = \sum_{i=1}^t \left[\left(X(i) - \frac{s^2}{2}\right)^2 - 2 \left(X(i) - \frac{\hat{\sigma}_s^2}{2}\right) \gamma z_i + \gamma^2 z_i^2 \right]$$

con $z_i = 1 + \frac{1}{\beta}(1 - e^\beta)e^{-\beta i}$.

Como se explica en [27] este proceso de minimización da lugar a dos ecuaciones no lineales cuya solución se obtiene utilizando la rutina *fsolve* de Matlab. Dicha rutina, encuentra la solución (γ^*, β^*) con un método numérico que se inicia con la semilla (γ_0, β_0) cuyo dominio es:

$$(\gamma_0, \beta_0) \in (0.1, 0.8) \times (0.1, 5)$$

Los resultados de la estimación por mínimos cuadrados ordinarios obtenida con Matlab son los siguientes (ver **Tabla 3**):

Tabla 3: Valores de los estimadores para el modelo asintótico

	$\hat{\sigma}_s^2$	$\hat{\gamma}_{MCO}$	$\hat{\beta}_{MCO}$
Alcira	0.0422098269	0.3113665692	2.4706387578
Barcelona	0.0311010319	0.2691828454	1.2703570356
Valencia	0.0257693877	0.238730593	1.0160837493
Murcia	0.0687540979	0.2191557633	1.5431850993
Zaragoza	0.04340546838	0.2080182736	∞^*
San Sebastián	0.28533003	0.2714320247	3.5470277486

Al calcular los valores de $\hat{\gamma}_{MCO}$ y $\hat{\beta}_{MCO}$ para diferentes semillas, se obtiene el mismo valor de $\hat{\gamma}_{MCO}$ para diferentes valores de $\hat{\beta}_{MCO}$. Esto significa que el parámetro β no influye en los resultados, por lo que es posible asumir que $\alpha_t = \hat{\gamma}_{MCO}$ para la inundación de Zaragoza, como en el modelo general.

3.3. Modelo de Ornstein-Ulhenbeck

En este modelo, $R(t)$ es el proceso Gaussiano definido en (13) como:

$$R(t) \sim N\left(Ke^{-\alpha t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right)$$

Al igual que en el modelo original, la esperanza de $X(t)$ en este caso tampoco depende de t por lo que es posible obtener una expresión analítica cerrada para los estimadores por el método de máxima verosimilitud derivando e igualando a cero el logaritmo neperiano de la suma de las n funciones de densidad condicionales siguiente,

$$\ln L(\alpha, \sigma) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln\left(\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha})\right) - \frac{\alpha}{\sigma^2(1 - e^{-2\alpha})} \sum_{i=1}^n (R(i) - R(i-1))e^{-\alpha}^2 \quad (18)$$

y sus expresiones son:

$$\hat{\alpha}_{MV} = \ln(\sum_{i=1}^n (R(i-1))^2) - \ln(\sum_{i=1}^n R(i)R(i-1)) \quad (19)$$

$$\hat{\sigma}_{MV}^2 = \frac{2\hat{\alpha}_{MV}}{n(1 - e^{-2\hat{\alpha}_{MV}})} \sum_{i=1}^n (R(i) - R(i-1))e^{-\alpha}^2 \quad (20)$$

El desarrollo completo de la obtención de estos estimadores puede consultarse en [28].

Los valores de los estimadores para las seis inundaciones consideradas utilizando el modelo Ornstein-Ulhenbeck, son resumen en la **Tabla 4** a continuación:

Tabla 4: Valores de los estimadores para el modelo Ornstein-Ulhenbeck		
	$\hat{\alpha}_{EMV}$	$\hat{\sigma}_{EMV}^2$
Alcira	0.2990821063	16.3988925399
Barcelona	0.2068640449	9.23190979432
Valencia	0.1773690288	14.8410725629
Murcia	0.2297645911	14.3896476717
Zaragoza	0.3385379521	28.6902771354
San Sebastián	0.3858518171	52.6399850026

4. COMPARACIÓN DE LOS MODELOS

A continuación, se analizan los resultados de cada modelo a partir del cálculo de las predicciones en cada uno de ellos. Para ello, se obtiene en primer lugar la media de sus.

Entonces, sea Y una variable aleatoria log-normal cuya distribución normal equivalente es $N(\mu; \sigma^2)$, $\ln Y \sim N(\mu; \sigma^2)$

de forma que su media es:

$$\mathbb{E}(Y) = e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)}$$

Consecuentemente, se calcula la media del modelo original y del modelo asintótico con esta fórmula. El modelo de Ornstein-Ulhenbeck, en cambio, se rige por una distribución normal por tanto la estimación es la media de la distribución. Cada modelo utiliza los parámetros estimados en la sección anterior, esto es:

$$\mathbb{E}(\hat{R}_1(t)) = Ke^{-\hat{\alpha}t} \quad (21)$$

$$\mathbb{E}(\hat{R}_2(t)) = Ke^{-\hat{\gamma}t + \frac{\hat{\gamma}}{\hat{\beta}}(1 - e^{-\hat{\beta}t})} \quad (22)$$

$$\mathbb{E}(\hat{R}_3(t)) = Ke^{-\hat{\alpha}t} \quad (23)$$

A continuación, se analizan las tres estimaciones para las seis inundaciones con datos disponibles a través de los resultados gráficos y se utilizan los errores de cada modelo para realizar la discusión.

En primer lugar, se consideran los tres modelos aplicados a la inundación de Alcira en la Figura 1 y se observa que el modelo original y el modelo Ornstein-Ulhenbeck dan lugar a resultados muy similares. Al analizar los errores en la Figura 2, se deduce que, a pesar de que el modelo asintótico se ajusta mejor a la primera observación, empeora para el resto de ellas.

Por tanto, para la serie de datos de la inundación de Alcira, se concluye fácilmente que el modelo asintótico no se ajusta y que no hay diferencia entre los otros dos modelos considerados.

Las predicciones para la serie de datos de Barcelona se muestran en la Figura 3 a continuación.

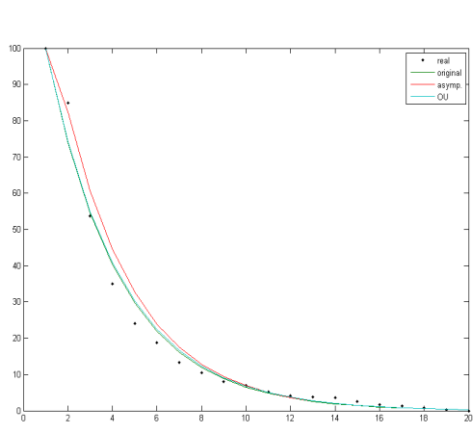


Figura 1: Predicciones Serie Alcira

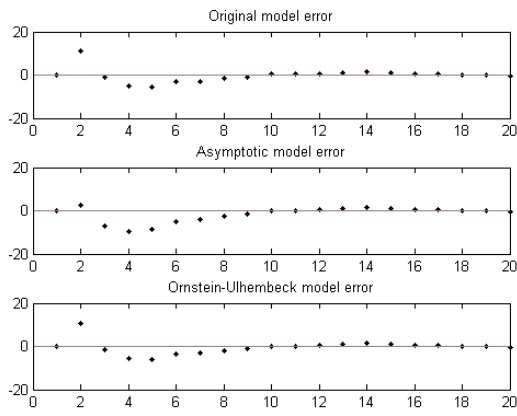


Figura 2: Errores Serie Alcira

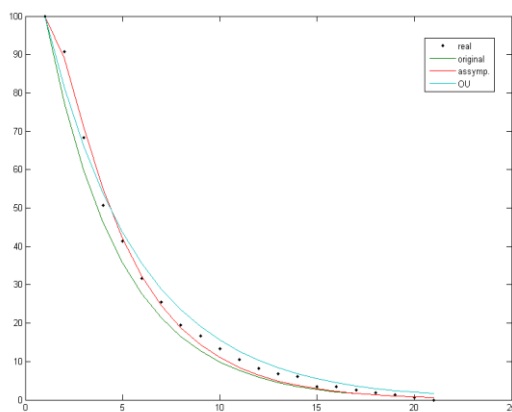


Figura 3: Predicciones Serie Barcelona

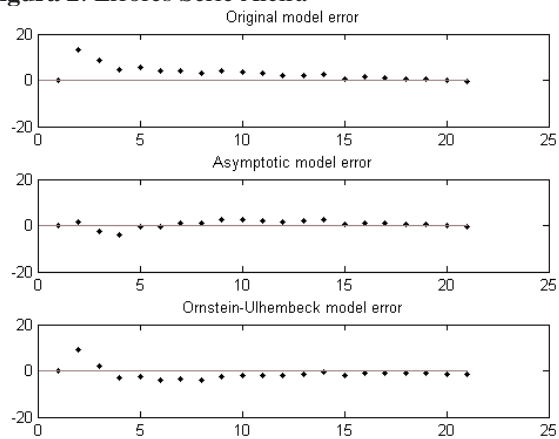


Figura 4: Errores Serie Barcelona

La observación de este gráfico no permite concluir cuál es el modelo que mejor se ajusta a los datos reales.

Sin embargo, a partir del gráfico de errores mostrado en la Figura 4, se observa que el modelo asintótico es el que mejor se ajusta a los datos de la serie de Barcelona porque es el que tiene menos errores. Por su parte, el modelo de Ornstein-Ulhenbeck se ajusta mejor que el modelo original.

Concluimos entonces, que el modelo original en este caso es el que peor se ajusta a los datos reales de la serie considerada.

En la inundación de Valencia, como muestra la Figura 5, ocurre lo mismo que en la inundación de Barcelona, no se puede concluir qué modelo se ajusta mejor simplemente viendo el gráfico de estimaciones.

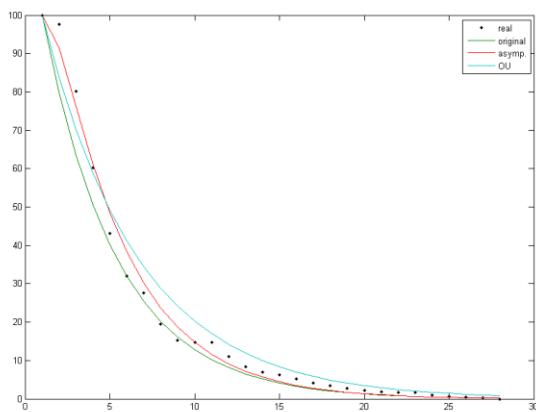


Figura 5: Estimaciones Serie Valencia

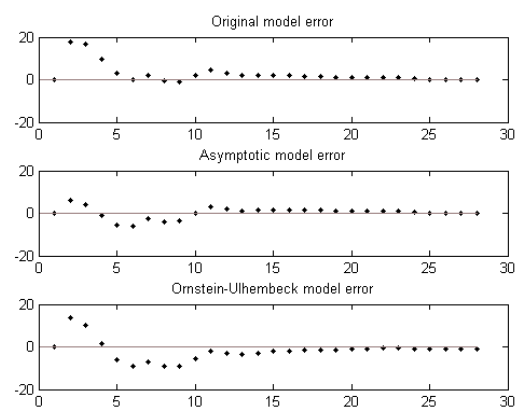


Figura 6: Errores Serie Valencia

Sin embargo, observando los errores en la Figura 6, el modelo asintótico, nuevamente, es el que se ajusta mejor y no es imposible concluir si el modelo original es mejor que el modelo de Ornstein-Ulhenbeck.

Las predicciones para la serie de datos de Murcia se muestran en la Figura 7.

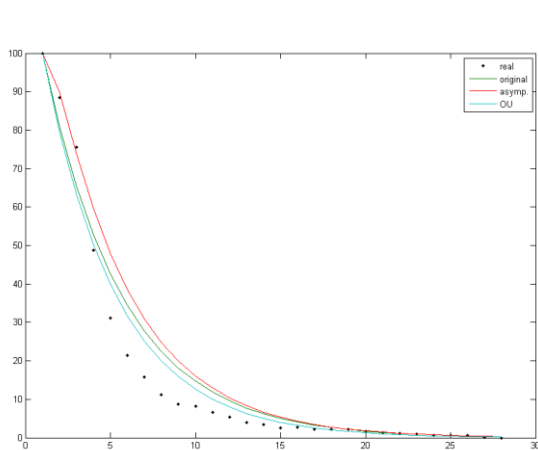


Figura 7: Predicciones Serie Murcia

Como puede observarse, las tres estimaciones tienen el mismo comportamiento y no se ajustan bien a los datos reales. Sin embargo, parece que el modelo Ornstein-Uhlenbeck es el que más cercano está a la realidad.

La Figura 8 de errores en esta serie, muestra que para la serie de datos de Murcia dichos errores son mayores que cometidos en las otras tres inundaciones. A pesar de eso, llegamos a la conclusión de que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck tiene menos errores y por tanto es el que mejor se ajusta a los datos reales. El modelo asintótico es el que peor ajuste realiza para la inundación de Murcia, ya que tiene mayores errores que el original.

Respecto a la inundación de Zaragoza es necesario comentar una peculiaridad que la diferencia ligeramente del resto de inundaciones analizadas. El proceso de declaración en este caso fue alterado por la ocurrencia de otras pequeñas inundaciones justo después de que ocurriera la mayor. Por tanto, los datos disponibles están condicionados y es posible que las predicciones no se ajusten adecuadamente. La Figura 9 muestra las predicciones teniendo en cuenta que, como no fue posible encontrar el parámetro β para el modelo asintótico, dicho modelo en este caso coincide con el modelo original.

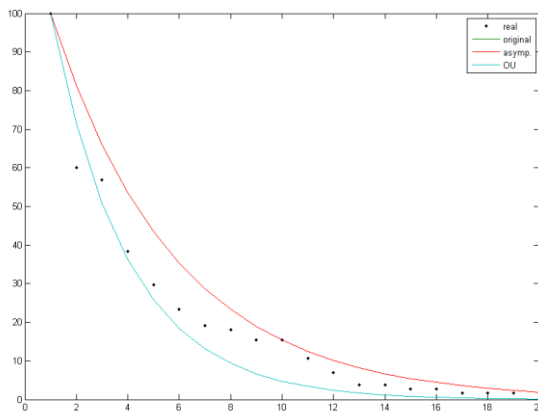


Figura 9: Predicciones Serie Zaragoza

Observando los errores en la Figura 10, podemos concluir fácilmente que la estimación del modelo Ornstein-Uhlenbeck se ajusta mejor a los datos iniciales, mientras que el modelo original se ajusta mejor a los datos finales.

Finalmente, las predicciones para la inundación de San Sebastián se muestran en la Figura 11. Para esta serie nuevamente, el modelo Ornstein-Uhlenbeck es el que mejor se ajusta a los datos iniciales, pero para los datos finales cualquiera de los otros dos modelos se ajusta mejor. En este caso, el modelo asintótico está tan cerca del original porque el valor de β está alrededor de 3,5. Esto significa que la función exponencial alcanza el valor constante más rápido que en los otros ejemplos, y el modelo asintótico se acerca al original.

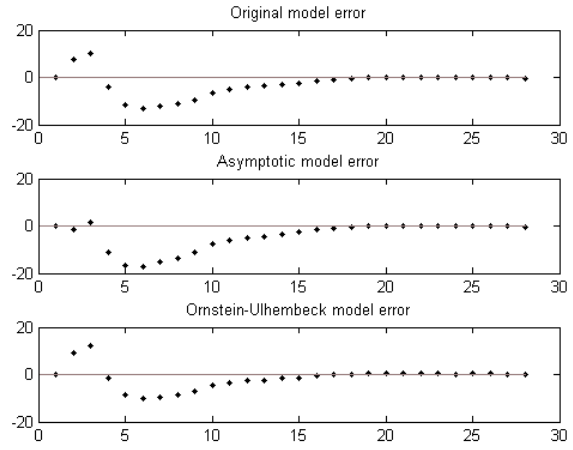


Figura 8: Errores Serie Murcia

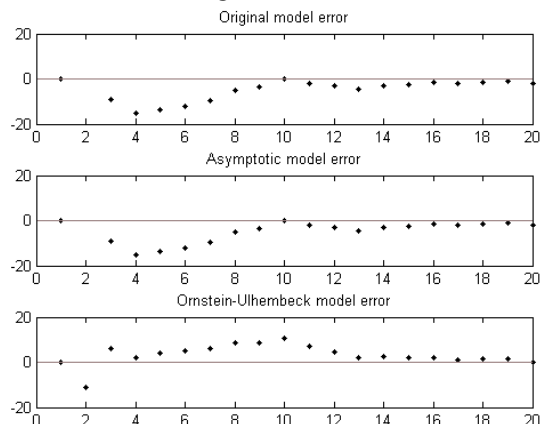


Figura 10: Errores Serie Zaragoza

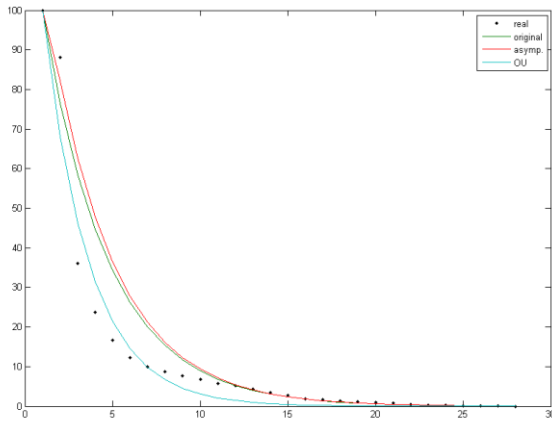


Figura 11: Predicciones Serie San Sebastián

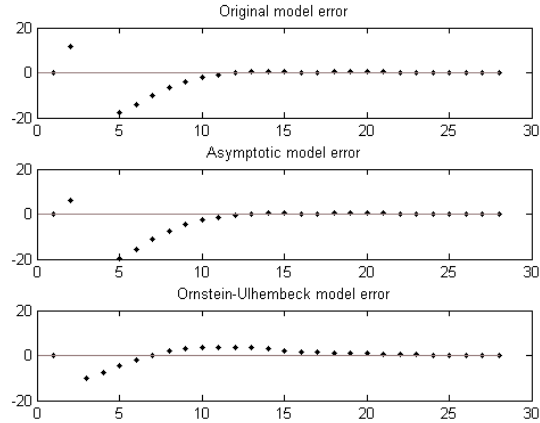


Figura 12: Errores Serie San Sebastián

Como se observa en Figura 12, el modelo original y el asintótico son predicciones realmente malas para las primeras semanas y el error parece ser el mayor de todas las inundaciones.

Como no es posible concluir cuál es el mejor modelo con el análisis gráfico realizado, se calcula a continuación la raíz del error cuadrático medio (RECM) para cada modelo, que se define en la siguiente ecuación,

$$RECM = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2} \quad (24)$$

donde Y_i es el valor observado e \hat{Y}_i es el valor predicho.

Los resultados de la RECM para todas las series y los tres modelos analizados se presentan en la **Tabla 5** a continuación:

Tabla 5: RECM para cada predicción

	Original	Asintótico	OU
Alcira	3.2541320138	3.7524090595	3.3478729786
Barcelona	4.3877716557	1.7110578306	2.9974719773
Valencia	5.2483780645	2.6079109831	5.0638737475
Murcia	5.8600227682	7.0942428363	4.9538378985
Zaragoza	8.0230716144	8.024036408	5.5091970335
San Sebastián	7.9264062564	8.8122165948	4.9404532812
Media	5.7832970622	5.3336456187	4.4687844861

Como puede observarse, el modelo Ornstein-Ulhenbeck es el que presenta menor RECM para todas las inundaciones excepto para la de Alcira, en la que dicho modelo tiene un error algo mayor que el del modelo original. Para las inundaciones de Murcia, Zaragoza y San Sebastián, el modelo Ornstein-Ulhenbeck es el que mejor ajusta ya que tiene el RECM mínimo. Podemos concluir por tanto que el modelo Ornstein-Ulhenbeck ajusta mejor que el original.

Para el modelo asintótico concluimos que también es una mejor aproximación que el modelo original porque tiene una RECM media menor. Sin embargo, se puede observar que este modelo es irregular, y que a pesar de que ajusta mejor en las series de datos de Barcelona y Valencia, las otras series presentan ajustes peores que para el resto de los modelos considerados.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo, se lleva a cabo la comparación de tres modelos del proceso de reclamación real asociado a la ocurrencia de una catástrofe desarrollados por [26], [27], [28] y [29]. Estas tres modelizaciones del proceso de declaración de siniestros permiten calcular de forma simple el índice de pérdidas desencadenante de los bonos sobre catástrofes y difieren sustancialmente de los modelos precedentes (ver, por ejemplo, [10] o [14]), ya que todos ellos suponen que la cuantía declarada de siniestros crece en el tiempo siguiendo un proceso de Wiener geométrico. Los tres modelos que aquí se comparan se basan en un crecimiento de dicha cuantía proporcional a la cuantía de siniestros pendiente de declarar que es la variable fundamental en el proceso de formalización de los mismos.

Después de presentar los principales estimadores, calcular las predicciones asociadas a los datos disponibles y asumiendo que las catástrofes analizadas son las seis inundaciones ocurridas en España

podemos concluir que el modelo de Ornstein-Uhlenbeck es el que se adapta mejor al proceso de declaración de siniestros real. Sin embargo, también se verifica que el modelo asintótico se ajusta muy bien las dos primeras semanas después de la ocurrencia de la inundación. También podemos concluir que el modelo original presenta la peor estimación para las inundaciones estudiadas, lo que supone que este modelo aún se puede desarrollar más. En este sentido, sería interesante diseñar en una modelización futura un nuevo modelo en el que se realizara una mixtura del modelo asintótico y del original, tomando el asintótico durante las dos primeras semanas y el original, desde la tercera semana hasta el final. Cabe destacar que los datos disponibles son muy específicos de una ubicación geográfica como la española cuyas características meteorológicas son muy diferentes a las de EE.UU. (una inundación en España está realmente lejos de ser un huracán en EE. UU.) por lo que no es posible a priori extrapolar los resultados obtenidos sobre adecuación de los modelos. Esto es, no es posible determinar si el modelo de Ornstein-Uhlenbeck se ajustará mejor a un huracán que nuestros otros modelos, como sucede con las inundaciones españolas. Ello se debe en gran medida a que las compañías aseguradoras no divulgan ningún tipo de información de todos los datos disponibles que tienen, por lo que es difícil obtener más datos, que serían realmente útiles para probar la validez de los modelos propuestos y permitirían obtener conclusiones reales más generalizadas.

Por otra parte, es importante tener en cuenta que los modelos aquí propuestos se limitan a determinar el numerador del índice de pérdidas por catástrofes sin entrar en determinar las expresiones de valoración o tarificación de los bonos sobre catástrofes. Sin embargo, en todos los casos, el precio del bono sobre catástrofes en un momento t de su periodo de negociación puede calcularse aplicando la teoría general de valoración de opciones (ver, por ejemplo, [21] o [25]). Así mismo, a partir de los diferentes modelos de índices aquí propuestos, también podría utilizarse la metodología empleada por Jarrow (2010) para valorar el bono, de forma que en este caso solo sería preciso determinar la probabilidad de ocurrencia de la catástrofe y la estructura temporal de los tipos de interés LIBOR valores que normalmente vienen calculados por agencias de modelización especializadas.

RECEIVED: OCTOBER, 2021.

REVISED: JANUARY, 2022.

REFERENCIAS

- [1] AASE, K. (1999): An Equilibrium Model of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. **Geneva Papers on Risk and Insurance Theory**, 24, 69-96.
- [2] AASE, K. (2001): A Markov Model for the Pricing of Catastrophe Insurance Futures and Spreads. **Journal of Risk and Insurance**, 68, 25-50.
- [3] ALEGRE, A., PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J., y DEVOLDER, P. (2003): Modèles discrets d'options sur risques catastrophiques. **Belgian Actuarial Bulletin**, 3(1), 28-32.
- [4] BARYSHNIKOV, Y., MAYO, A. y TAYLOR, D.R. (2001): Pricing of Cat Bonds, Working Paper, Version October. Disponible en: <https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.202.9296&rep=rep1&type=pdf>
- [5] BIAGINI, F., BREGMAN, Y. y MEYER-BRANDIS, T. (2008): Pricing of catastrophe insurance options written on a loss index with reestimation. **Insurance: Mathematics and Economics**, 43, 214-222.
- [6] BRAUN, A. (2011): Pricing catastrophe swaps: A contingent claims approach. **Insurance: Mathematics and Economics**, 49(3), 520-536.
- [7] BURNECKI, K. (2005): Pricing catastrophe bonds in a compound non-homogeneous Poisson model with left truncated loss distributions. Presentation Wroclaw University of Technology. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/289106928_Pricing_of_Catastrophe_Bonds
- [8] BURNECKI, K. y KUKLA, G. (2003): Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds. **Applicationes Mathematicae**, 30, 315- 324.
- [9] COX, S. H. Y PEDERSEN, H. (2000): Catastrophe Risk Bonds. **North American Actuarial Journal**, 4 (4), 56-82.
- [10] CUMMINS J. D. y GEMAN, H. (1995): Pricing Catastrophe Insurance Futures and Call Spreads: An Arbitrage Approach. **Journal of Fixed Income**, 4 , 46-57.
- [11] CHANG, C.W., CHANG, J.S.K. y LU, W. (2010): Pricing catastrophe options with stochastic claim arrival intensity in claim time. **Journal of Banking & Finance**, 34 (1), 24-32.
- [12] EGAMI, M. y YOUNG, V. (2008): Indifference prices of structured catastrophe (CAT) bonds. **Insurance: Mathematics and Economics**, 42, 771-778.
- [13] EMBRECHTS, P. y MEISTER, S. (1997): Pricing insurance derivatives, the case of CAT futures. En *Proceedings of the 1995 Bowles Symposium on Securitization of Insurance Risk, Georgia State University, Atlanta, Georgia*. Society of Actuaries, Monograph M-FI97-1: 15-26.

- [14] GEMAN, H. y YOR, M. (1997): Stochastic time changes in catastrophe option pricing. **Insurance: Mathematics and Economics**, 21,185-193.
- [15] JAIMUNGAL, S. y WANG, T. (2006): Catastrophe options with stochastic interest rates and compound Poisson losses. **Insurance: Mathematics and Economics**, 38, 469-483.
- [16] JARROW, R.A. (2010): A simple robust model for Cat bond valuation. **Finance Research Letters**, 7, 72-79
- [17] JOHNSON, N.L., KOTZ, S. y BALAKRISHAN, N. (1994): **Continuous univariate distributions**, vol. 1. New York: John Wiley & Sons Inc.
- [18] LAI, V. S., PARCOLLET, M. y LAMOND, B. F. (2014): The valuation of catastrophe bonds with exposure to currency exchange risk. **International Review of Financial Analysis**, 33(C), 243-252.
- [19] LEE, J. P. y YU, M. T. (2002): Pricing default-risky Cat bonds with moral hazard and basis risk. **Journal of Risk and Insurance**, 69, 25-44.
- [20] LEE, J. P. y YU, M. T. (2007): Valuation of catastrophe reinsurance with catastrophe bonds, **Insurance: Mathematics and Economics**, 41, 264-278.
- [21] LOUBERGÉ, H., KELLEZI, E. y GILLI, M. (1999): Using Catastrophe-Linked Securities to Diversify Insurance Risk: A Financial Analysis of Cat Bonds. **Journal of Insurance Issues**, 22, 125-146.
- [22] MALLIARIS, A.G. y BROCK, W.A. (1977): **Stochastic methods in economics and finance**. North-Holland: New York.
- [23] MUERMANN, A. (2003): Actuarially Consistent Valuation of Catastrophe Derivatives. Working Paper Series The Wharton Financial Institutions Center, 03-18, 2003. Disponible en: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.387.1798&rep=rep1&type=pdf>
- [24] MURPHY, C. B. (2020): Catastrophe Bond. Investopedia. Disponible en: <https://www.investopedia.com/terms/c/catastrophebond.asp>
- [25] NOWAK, P. y ROMANIUK, M (2013): Pricing and simulations of catastrophe Bonds. **Insurance: Mathematics and Economics**, 52, 18-28.
- [26] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2008): Modelling loss index triggers for CAT bonds: a continuous approach. **Variance**, 2, 253-265.
- [27] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2009): Elaborating a catastrophic loss index for insurance-linked securities (ILS): A continuous model. **Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance**, 3, 1-13.
- [28] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2016): Tarificación de derivados sobre catástrofes con desencadenantes de índices de pérdidas: modelo asintótico basado en un proceso de Wiener. **Rect@**, 17, 81-103.
- [29] PÉREZ-FRUCTUOSO, M. J. (2017): Tarificación de bonos sobre catástrofes (cat bonds) con desencadenantes de índices de pérdidas. Modelización mediante un proceso de Ornstein-Uhlenbeck. **Revista de métodos Cuantitativos para la Economía y la Empresa**, 24, 340-361.
- [30] POLACEK, A. (2018). "Catastrophe bonds: A primer and retrospective". [online] Chicago Fed Leeter, The Federal Reserve Bank of Chicago. Disponible en: <https://www.chicagofed.org/publications/chicago-fed-letter/2018/405>
- [31] SHAO, J., PANTELOUS, A., PAPAIOANNOU, A. D. (2015): Catastrophe risk bonds with applications to earthquakes. **European Actuarial Journal**, 5, 113-138
- [32] SWISS RE (2011): The fundamentals of insurance-linked securities. Transforming insurance risk into transparent and tradable capital market products. Disponible en: file:///Users/mjpf/Downloads/Swiss%20Re%20SRCM_The_Fundamentals_of_ILS_web.pdf
- [33] UNGER, A.J.A. (2010): Pricing index-based catastrophe bonds: Part 1. Formulation and discretization issues using a numerical PDE approach. **Computers & Geosciences**, 36, 139-149.
- [34] ZONG-GANG, M. y CHAO-QUN, M. (2013): Pricing catastrophe risk Bonds: a mixed approximation method. **Insurance: Mathematics and Economics**, 52, 243-254.
- [35] WANG, S.S. (2004): Cat Bond Pricing using Probability Transforms. **Geneva Papers: Etudes et Dossiers, special issue on "Insurance and the State of the Art in Cat Bond Pricing"**, 278, 19-29.
- [36] WANG, X. (2016): Catastrophe equity put option with target variance. **Insurance: Mathematics and Economics**, 71(C), 79-86.