

# UN ESTUDIO COMPARADO DE DOS ENFOQUES NO DETERMINISTAS EN EL DELPHI DE PRONÓSTICO

Miguel Cruz Ramírez<sup>1</sup>, Facultad de Informática y Matemática, Universidad de Holguín, Cuba  
Elio Higinio Cables Pérez<sup>2</sup>, Facultad de Ingeniería de Sistemas, Universidad Antonio Nariño, Colombia

## ABSTRACT

The present paper contains a comparative study between two non-deterministic approaches to the Delphi method: one based on Pythagorean fuzzy numbers, and the other based on the cloud model. From the empirical evidence obtained in an experimental investigation ( $N = 56$  experts), related to the academic results forecast, it is observed that both approaches produce relatively similar results, even close to the results of an ARIMA test based on series chronological. The study reveals that both methods differ substantially in the way they input, process and output information. Advantages and disadvantages are analyzed, which must be addressed in each case. It is concluded that both approaches are viable, as alternative resources in unusual situations such as the COVID-19 pandemic, where the use of diachronic information is not always completely justified.

**KEYWORDS:** Delphi method, prospective, forecast, Pythagorean fuzzy numbers, Cloud model

**MSC:** 03E72, 62P25

## RESUMEN

El presente trabajo describe un estudio comparativo entre dos enfoques no deterministas del método Delphi: uno basado en números difusos pitagóricos, y otro basado en el modelo de nube. A partir de las evidencias empíricas obtenidas en una investigación experimental ( $N = 56$  expertos), relacionado con el pronóstico de resultados académicos, se observa que ambos enfoques producen resultados relativamente similares, incluso cercanos a los resultados de una prueba ARIMA basada en series cronológicas. El estudio revela que ambos métodos se diferencian sustancialmente en la forma en que captan, procesan y exportan la información. Se evidencian ventajas y desventajas, las cuales deben ser atendidas en cada caso. Se concluye que estos enfoques son viables, como recursos alternativos ante situaciones inusuales como el caso de la pandemia de la COVID-19, donde el empleo de información diacrónica no siempre queda completamente justificado.

**PALABRAS CLAVE:** método Delphi, prospectiva, pronóstico, números difusos pitagóricos, modelo de nube

## 1. INTRODUCCIÓN

El método Delphi constituye un caso especial del método de criterio de experto. Son cuatro sus características fundamentales: el anonimato de un panel de expertos, el diligenciado secuencial de cuestionarios, la retroalimentación controlada por un grupo coordinador, y la respuesta estadística de grupo [7]. Existen numerosas variantes de este método, las cuales han estado vinculadas intrínsecamente a los avances que ha experimentado el procesamiento y análisis de datos y al desarrollo de las tecnologías de la información y las comunicaciones, fundamentalmente [8].

Una de las variantes primigenias de este método consiste en el Delphi de pronóstico, cuya historia se remonta a mediados del siglo XX, en los estudios seminales desarrollados por la Corporación Rand en los Estados Unidos [11]. La aparente sencillez de esta variante suele enmascarar serios obstáculos, relacionados con situaciones de imprecisión y vaguedad. Por ejemplo, en el momento de diligenciar un cuestionario pueden confluir limitaciones propias de la escala construida para cada ítem, junto a la subjetividad que entraña el pronóstico perceptivo del experto. Lo primero suele imponer obstáculos concernientes a la imprecisión, en el sentido de las falencias propias del instrumento de medición. Lo segundo, está más relacionado con la respuesta

---

E-mail: [mcruzr@uho.edu.cu](mailto:mcruzr@uho.edu.cu)  
E-mail: [ehcables@uan.edu.co](mailto:ehcables@uan.edu.co)

del sujeto ante conceptos con ambigüedad semántica, con predicados que pueden percibirse simultáneamente como verdaderos y falsos, entre otros escenarios de vaguedad.

La práctica demostró que existen sucesos relativamente inciertos e indeterminados, donde los modelos aleatorios clásicos no resultan suficientemente viables. Como consecuencia, Zadeh [42] introdujo los conjuntos difusos, con la motivación de investigar el lenguaje humano. Bajo este enfoque, los modelos que mejor se ajustan al estudio de una declaración prospectiva como: "...la pandemia se controlará pronto", no son primordialmente probabilísticos sino borrosos.

Los modelos difusos también experimentaron renovación desde sus etapas más tempranas, a raíz de la complejidad inherente al procesamiento de información inespecífica [27]. Por un lado, se reconoció que el empleo de la función de pertenencia contradice, en cierta medida, la noción de indeterminación. En efecto, una vez que esta función queda precisada, se puede calcular el grado bajo la cual un elemento pertenece a cierto universo. Al decir de Li, Liu, y Gan [24, p. 359], esto último "...es incompatible con el espíritu del conjunto difuso porque la incertidumbre de un elemento que pertenece a un concepto difuso se vuelve cierta y precisa en este momento". Por otro lado, se identificaron limitaciones en la capacidad de estos modelos para explicar situaciones prácticas, donde la respuesta subjetiva de un individuo ocasionalmente no satisface el principio aristotélico del tercero excluido [4].

Para subsanar estos obstáculos, se exploraron numerosos caminos de generalización. Por ejemplo, en vista de que algunos conceptos lingüísticos contienen aleatoriedad y falta de claridad simultáneamente, a tenor de la frontera borrosa que existe en su extensión, se desarrollaron modelos que conjugaron ambos aspectos. En un inicio, el propio Zadeh [43] introdujo los conjuntos difusos tipo-2, los cuales capturan la incertidumbre de la función de pertenencia con ayuda de un grado de libertad adicional, en el estudio de variables lingüísticas. Más adelante, con base en estas ideas, Turksen [35] y Gorzałczany [16] desarrollaron en concepto de conjunto difuso evaluado por intervalos.

Atanassov [1] añadió una función de no pertenencia, bajo el supuesto de que la suma de los valores de pertenencia y de no pertenencia no superen la unidad real. Bajo esta perspectiva, la diferencia entre la unidad y dicha suma proveyó una medida del grado de vaguedad en su modelo de los conjuntos difusos, los cuales él mismo denominó "intuicionistas". Análogamente, Gau y Buehrer [13] desarrollaron los conjuntos "vagos" cuya ventaja, según estos autores, consiste en que "...separan la evidencia positiva y negativa de la función de pertenencia de un elemento en el conjunto" [13, p. 614]. Por su parte, Garibaldi, Jaroszewski y Musikasuan [12] consideraron la variabilidad de la función de pertenencia como una función aleatoria, y así arribaron a la noción de conjunto difuso no estacionario. Asimismo, Li, Liu, y Gan [24] proporcionaron una perturbación estocástica a la función de pertenencia, en torno a cierto valor central. Ello condujo al concepto de modelo de nube, donde la huella de incertidumbre se refleja por medio de "gotas" de la nube, bajo un esquema discreto.

Si bien el espíritu renovador de las generalizaciones estuvo acompañado de la búsqueda de analogías e interrelaciones, algunos estudios reflejaron coincidencia conceptual, como en los casos de los conjuntos difusos intuicionistas y los conjuntos vagos [3]. También se demostró la existencia de algunos isomorfismos, como ocurre entre los conjuntos intuicionistas evaluados por intervalo y los conjuntos  $L$ -fuzzy [15], para ciertos láteces específicos [9]. Incluso es notable, como señalan Huang y Yang [18], la equivalencia entre los conceptos de conjuntos difusos evaluados por intervalo y los conjuntos difusos intuicionistas, lo cual fue demostrado por Deschrijver y Kerre [9]. Una observación análoga sigue de la inclusión de los conjuntos difusos evaluados por intervalo, dentro de la clase más amplia de los conjuntos difusos tipo-2 [4].

Los estudios de pronóstico relacionados con el método Delphi, constituyen un ejemplo de investigación perceptiva de construcción de futuro, donde cada experto aporta un criterio que es atemperado por la opinión de todo el panel. Con ayuda de una retroalimentación controlada, los expertos anónimos reciben información de la opinión colectiva, para entonces emitir una nueva opinión. Bajo el precepto epistémico de que el saber colectivo es más objetivo que el individual, se forma una visión de futuro. Se trata de un proceso donde los modelos antes mencionados encuentran terreno fértil, a partir de la forma en que se capta y se procesa información vaga e imprecisa. Por tal motivo, en la literatura se registran investigaciones basadas en el Delphi difuso [14, 21, 25, 31], el Delphi difuso intuicionista [29, 30], el Delphi difuso pitagórico [26, 41], el Delphi indeciso borroso [19], y el Delphi de nube [40].

En este escenario diverso, también han visto la luz estudios comparados entre diferentes clases de conjuntos difusos [16, 22]. Por ejemplo, Huang y Yang [18] han discutido ciertas semejanzas y diferencias, así como ventajas y desventajas de los modelos basados en conjuntos difusos tipo-2, estacionarios, y de nube, cuando estos representan el conocimiento bajo imprecisión y vaguedad. Si bien estas investigaciones establecen paralelos de carácter teórico, otras dirigen su mirada hacia cuestiones empíricas [17, 33]. De aquí, precisamente,

surge la motivación de establecer un paralelo entre diferentes enfoques para el tratamiento de la imprecisión y la vaguedad, en el marco de su aplicación en el método Delphi.

En el presente trabajo se desarrolla un estudio comparado de dos enfoques no deterministas de este método: el Delphi difuso pitagórico y el Delphi de nube. El primero explora la vaguedad e imprecisión de la información que proveen los expertos, bajo un paradigma intuicionista. El segundo pondera la incertidumbre presente en el proceso. Para el establecimiento del paralelo entre ambos enfoques, primero se describen de forma detallada y luego se experimentan en el marco de un suceso real, relacionado con el pronóstico de promoción en un examen de ingreso a la educación superior.

## 2. METODOLOGÍA

Seguidamente se describe la metodología adoptada para la realización de un estudio comparado, la cual considera dos enfoques del método Delphi de tipo pronóstico bajo situaciones de imprecisión y vaguedad. La estructura de la metodología contempla cinco apartados. El primero está relacionado con la descripción del modelo intuicionista pitagórico y del modelo de nube, como enfoques no deterministas del método Delphi; el segundo contiene el diseño de un instrumento para captar la percepción subjetiva del pronóstico; el tercero detalla las características de los participantes que integraron un panel de expertos; el cuarto delinea las variables investigadas para la implementación del estudio comparado; y el quinto refiere los recursos empleados para el procesamiento de los datos.

### 2.1 Dos enfoques no deterministas del método Delphi

El presente estudio se centra en el cálculo de un pronóstico de resultados docentes de promoción. Es por ello que se presentan los elementos esenciales para llevar a cabo dicho propósito, conforme al método Delphi bajo los dos enfoques mencionados y sobre universos de discursos formados por intervalos reales  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . En todo caso se requiere del concepto de número, de distancia y de media aritmética, los cuales son frecuentes en los Delphi de pronóstico.

#### 2.1.1 El método Delphi con enfoque basado en números difusos pitagóricos

Para el caso del Delphi de pronóstico con enfoque difuso pitagórico (*Delphi<sub>EDP</sub>*), en primera instancia, se adopta el concepto de conjunto difuso pitagórico propuesto por Yager [38], como una modificación del enfoque intuicionista de Atanassov [1, 2].

*Definición 1.* Sea  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$  un universo de discurso. Se dice que  $\tilde{A}$  es un conjunto difuso pitagórico si existen dos funciones de agregación  $\mu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$  y  $\nu_{\tilde{A}}: X \rightarrow [0,1]$ , con  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}^2 + \nu_{\tilde{A}}^2 \leq 1$ , tales que  $\tilde{A} = \{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}(x), \nu_{\tilde{A}}(x) \rangle \mid x \in X \}$ . Los valores  $\mu_{\tilde{A}}(x)$  y  $\nu_{\tilde{A}}(x)$  (abreviadamente  $\mu_{\tilde{A}}$  y  $\nu_{\tilde{A}}$ ) denotan, respectivamente, el grado de pertenencia y de no pertenencia de  $x$  al conjunto  $\tilde{A}$ . En este caso, se dice que  $\pi_{\tilde{A}}(x) = \sqrt{1 - \mu_{\tilde{A}}^2 - \nu_{\tilde{A}}^2}$  define la función de indeterminación de  $x$  en  $\tilde{A}$ .

Sobre los conjuntos difusos intuicionistas han sido definidas numerosas operaciones. En el caso pitagórico se adoptan las siguientes operaciones, definidas por Zhang y Xu [45].

*Definición 2.* Sean  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$  dos conjuntos difusos pitagóricos reales y sea  $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$  un escalar real positivo, entonces se establecen las siguientes operaciones para toda  $x \in X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{A} \oplus \tilde{B} &= \left\{ \langle x, \sqrt{\mu_{\tilde{A}}^2 + \mu_{\tilde{B}}^2 - \mu_{\tilde{A}}^2 \mu_{\tilde{B}}^2}, \nu_{\tilde{A}} \nu_{\tilde{B}} \rangle \right\}, \tilde{A} \otimes \tilde{B} = \left\{ \langle x, \mu_{\tilde{A}} \mu_{\tilde{B}}, \sqrt{\nu_{\tilde{A}}^2 + \nu_{\tilde{B}}^2 - \nu_{\tilde{A}}^2 \nu_{\tilde{B}}^2} \rangle \right\}, \\ \lambda \tilde{A} &= \left\{ \langle x, \sqrt{1 - (1 - \mu_{\tilde{A}}^2)^\lambda}, \nu_{\tilde{A}}^\lambda \rangle \right\}, \tilde{A}^\lambda = \left\{ \langle x, \mu_{\tilde{A}}^\lambda, \sqrt{1 - (1 - \nu_{\tilde{A}}^2)^\lambda} \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Las dos primeras operaciones de suma y producto son internas, y las otras dos operaciones restantes son externas respecto al escalar  $\lambda$ . Zhang y Xu [45] demuestran varias propiedades que satisfacen estas operaciones, las cuales han sido generalizadas por Jamkhaneh y Garg [20]. También es importante señalar que, en ningún caso, estas operaciones alteran los valores de  $x$ . Por el contrario, el efecto se materializa en los valores de las funciones de pertenencia y de no pertenencia.

**Definición 3.** La distancia entre dos conjuntos difusos pitagóricos reales y continuos  $\tilde{A}$  y  $\tilde{B}$ , del universo de discurso  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , se define por la expresión:  $d(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{2(b-a)} \int_a^b (|\mu_{\tilde{A}}^2(x) - \mu_{\tilde{B}}^2(x)| + |v_{\tilde{A}}^2(x) - v_{\tilde{B}}^2(x)| + |\pi_{\tilde{A}}^2(x) - \pi_{\tilde{B}}^2(x)|) dx$ .

Con base en la primera definición, se construye un tipo de conjunto difuso pitagórico más sencillo denominado triangular, el cual resulta útil en las aplicaciones prácticas ya que se utiliza en un sentido numérico [5, 32].

**Definición 4.** Un número difuso pitagórico triangular es un conjunto difuso pitagórico real  $\tilde{a} = \langle x, \mu_{\tilde{a}}(x), v_{\tilde{a}}(x) \rangle$ ,  $x \in [a, b]$ , donde las funciones de pertenencia y de no pertenencia vienen dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \mu \left( \frac{x-a}{a-a} \right)^2 & \text{si } \underline{a} \leq x < a \\ \mu & \text{si } x = a \\ \mu \left( \frac{\bar{a}-x}{\bar{a}-a} \right)^2 & \text{si } a < x \leq \bar{a} \\ 0 & \text{si } x < \underline{a} \text{ o } x > \bar{a} \end{cases}, v_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \left[ \frac{a-x+v^2(x-a)}{a-a} \right]^2 & \text{si } \underline{a} \leq x < a \\ v & \text{si } x = a \\ \left[ \frac{x-a+v^2(\bar{a}-x)}{\bar{a}-a} \right]^2 & \text{si } a < x \leq \bar{a} \\ 1 & \text{si } x < \underline{a} \text{ o } x > \bar{a} \end{cases}$$

siendo  $\underline{a}$ ,  $x$ ,  $\bar{a}$  ( $a \leq \underline{a} \leq x \leq \bar{a} \leq b$ ) tres constantes reales, y  $\mu$ ,  $v$  valores reales no negativos, tales que  $0 \leq \mu^2 + v^2 \leq 1$ .

Cada número difuso pitagórico triangular (DPT) puede denotarse sintéticamente por  $\tilde{a} = \langle X, P \rangle$ , donde  $X = X(\underline{a}, a, \bar{a})$  se denominará el dominio y  $P = P(\mu, v)$  la imagen del número, respectivamente.

**Definición 5.** El promedio de  $N$  números DPT  $\tilde{a}_i = \langle X_i(\underline{a}_i, a_i, \bar{a}_i), P_i(\mu_i, v_i) \rangle$ , con  $1 \leq i \leq N$ , es el número DPT:

$$\tilde{b} = \langle X \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{a}_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N a_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{a}_i \right), P \left( \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mu_i^2}, \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} \right) \rangle.$$

Obviamente, la definición anterior es consistente, ya que puede verificarse que los componentes del dominio  $X$  son tres medias aritméticas ordenadas de manera no decreciente, mientras que la imagen  $P$  está formada por dos medias cuadráticas cuya suma de cuadrados pertenece al conjunto  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ .

Un aspecto importante para el procesamiento de la información proveída por expertos, consiste en ponderar el valor de opinión. Algunos estudios Delphi difusos (no pitagóricos) han considerado esta cuestión, ya sea distinguiendo el grado de importancia de los aspectos evaluados [26, 41], o bien diferenciado el nivel de competencia de cada experto [10]. En el caso de los conjuntos difusos pitagóricos, en la literatura han sido desarrollados algunos operadores de agregación, como es el caso del operador OWA (*Ordered Weighted Averaging*, [37]), principalmente con la finalidad de realizar estudios para la toma de decisiones multicriterio [28, 44]. No obstante, durante la presente investigación no se encontró referencia de un estudio *Delphi*<sub>EDP</sub>, donde se pondere la competencia experta.

Los aspectos anteriores apenas conforman un marco significativamente estrecho de los modelos difusos pitagóricos, no obstante, resultan suficientes para el procesamiento de información basada en el pronóstico de valores reales. Particularmente, el valor real a pronosticar puede considerarse un número DPT, donde el dominio y la imagen responden al grado de imprecisión y de vaguedad, respectivamente. Además, como expresión de la vaguedad sirve la función  $\pi_{\tilde{a}}(x)$ , la cual es función de indeterminación de  $x$  en  $\tilde{a}$ .

Tomando como base las operaciones de la segunda definición, es posible adoptar un procedimiento de ponderación para el Delphi de pronóstico, con base en la evaluación de la competencia experta. Si la evaluación del experto es difusa, podría elegirse una de las dos primeras operaciones, donde un factor correspondería a la evaluación difusa del experto sobre todo el universo de discurso  $X$ , mientras que el otro factor expresaría su pronóstico dentro de este mismo universo. Por su parte, si la evaluación del experto no es difusa, entonces vale tomar por ella el escalar  $\lambda$  y elegir una de las dos últimas operaciones de dicha definición.

Este mecanismo de ponderación no afecta el pronóstico propiamente dicho, sino que actúa sobre ambas funciones de agregación. Visto así, la ponderación se pertrecha de un significado preciso con base en la Definición 2, sin embargo, es necesario proveer de sentido la operación que se seleccione. En el presente trabajo se adopta la tercera operación, consistente en el producto externo de un escalar que representa monótonamente el nivel de competencia experta, por un número difuso pitagórico que además expresa el pronóstico experto. El sentido de esta operación subyace en el comportamiento de la función de indeterminación  $\pi_{\tilde{a}}(x)$ . En efecto,

$$\text{considérese la función de indeterminación } \pi_{\lambda, \tilde{a}} = \sqrt{1 - \mu_{\lambda, \tilde{a}}^2 - v_{\lambda, \tilde{a}}^2} = \sqrt{1 - [1 - (1 - \mu_{\tilde{a}}^2)^\lambda] - v_{\tilde{a}}^{2\lambda}} = \sqrt{(1 - \mu_{\tilde{a}}^2)^\lambda - v_{\tilde{a}}^{2\lambda}},$$

o abreviadamente,  $\pi(\lambda) = \sqrt{(1 - \mu^2)^\lambda - v^{2\lambda}}$ . Si  $\mu = v = 0$  o  $\mu^2 + v^2 = 1$ , entonces  $\pi(\lambda) = 1$  o  $0$  respectivamente, así que la operación  $\lambda \tilde{a}$  deja invariante una especie de vaguedad total o bien su ausencia completa, para todo

$\lambda > 0$ . Por su parte, si  $0 < \mu^2 + \nu^2 < 1$ , entonces  $\pi(\lambda)$  es estrictamente creciente en el intervalo  $(0, \lambda_0]$  y estrictamente decreciente en el intervalo  $[\lambda_0, +\infty)$ , donde  $\lambda_0 = \lambda_0(\mu, \nu) = \log_{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}} \frac{2 \ln \nu}{\ln(1-\mu^2)}$  es una función de dos variables, continua sobre su dominio de definición. Puede comprobarse que en el caso  $\mu \rightarrow 1$  y  $\nu \rightarrow 0$ , resulta  $\lambda_0 \rightarrow 0$ , mientras que para caso  $\mu \rightarrow 0$  y  $\nu \rightarrow 1$ , resulta  $\lambda_0 \rightarrow +\infty$ . Por tanto, el producto externo  $\lambda \tilde{A}$ , donde  $\lambda$  es un escalar que mide el nivel de competencia experta, mientras que  $\tilde{A}$  es el pronóstico emitido por el experto correspondiente, cobra los siguientes sentidos en su aplicación al *Delphi*<sub>EDP</sub>:

1. La selección del escalar  $\lambda$  real y estrictamente positivo, tal y como se precisa en la Definición 2, favorece la adopción de una escala de razón que permite diferenciar los niveles de competencia en el panel de expertos. En general, el valor  $\lambda = 0$  induciría forzosamente un valor de pertenencia imposible ( $\mu_{\lambda \tilde{A}} = 0$ ) y un valor de no pertenencia seguro ( $\nu_{\lambda \tilde{A}} = 1$ ), o bien una indeterminación para  $\mu_{\tilde{A}} = 1$  o  $\nu_{\tilde{A}} = 0$ .
2. La comparación  $\lambda_1 < \lambda_2$  para  $\mu \rightarrow 1$  y  $\nu \rightarrow 0$ , cobra sentido dentro del intervalo  $[\lambda_0, +\infty)$ , donde  $\lambda_0 \rightarrow 0$  y  $\pi(\lambda)$  tiene monotonía decreciente. Aquí, a mayor valor del escalar  $\lambda$ , menor será la vaguedad. Por tanto, un individuo con elevada experticia que realiza un pronóstico muy seguro, se pondera bajo el sentido de proveer menor vaguedad al resultado global.
3. La comparación  $\lambda_1 < \lambda_2$  para  $\mu \rightarrow 0$  y  $\nu \rightarrow 1$ , cobra sentido dentro del intervalo  $(0, \lambda_0]$ , donde  $\lambda_0 \rightarrow +\infty$  y  $\pi(\lambda)$  tiene monotonía creciente. En este caso, a mayor valor del escalar  $\lambda$ , mayor será la vaguedad. Luego, un individuo con elevada experticia que realiza un pronóstico muy inseguro, se pondera en el sentido de proveer mayor vaguedad al resultado global.

### 2.1.2 El método Delphi con enfoque basado en el modelo de nube

El segundo enfoque a considerar está dado por el Delphi basado en el modelo de nube (*Delphi*<sub>EMN</sub>), el cual fue desarrollado por Yang, Zeng y Zhang [40], a partir de este modelo [23, 24].

*Definición 6.* Considérese un concepto cualitativo  $\tilde{T}$ , descrito por un universo de discurso  $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Sea  $x \in X$  una instancia aleatoria del concepto  $\tilde{T}$  y  $\mu_{\tilde{T}}(x) \in [0, 1]$  el grado de certidumbre de  $x$  a lo largo de  $\tilde{T}$ , el cual corresponde a un número aleatorio con una tendencia estable. Entonces, la distribución de  $x$  en el universo  $X$  se denomina nube y  $x$  constituye una gota de la nube.

De forma general se cumple que para todo  $x \in X$ , la aplicación  $\mu_{\tilde{T}}(x)$  es no inyectiva, por su propia naturaleza.

O sea, el grado de certeza de  $x$  a lo largo del concepto  $\tilde{T}$  constituye una distribución de probabilidad, en lugar de un valor fijo. En el presente estudio se utilizarán nubes normales, en un sentido gaussiano. A partir de aquí, son tres los parámetros fundamentales que describen una nube normal: la expectativa (*Ex*), consistente en la esperanza matemática de que las gotas de la nube pertenezcan al concepto  $\tilde{T}$ ; la entropía (*En*), que expresa la medida borrosa de  $\tilde{T}$ , como ámbito de cobertura del universo que puede ser admitido por este concepto; y la hiperentropía (*He*), consistente en el grado de incertidumbre de la entropía, y que refleja la dispersión de las gotas de la nube [36].

De modo similar al enfoque anterior, la imprecisión del pronóstico experto queda definida por un intervalo provisto de un valor central más probable. En este caso, el valor central está dado por la expectativa y la amplitud depende de la entropía. Por ejemplo, siguiendo la regla “3 $\sigma$ ”, el intervalo real  $[Ex - 3En, Ex + 3En]$  subsume alrededor del 99.74% de toda la distribución normal. Li y Yi (2008, pp. 123-124) sugieren que el intervalo  $[Ex - En, Ex + En]$  comprende los “elementos básicos” que explican la variable investigada, mientras que el intervalo más restringido  $[Ex - 0.67 \times En, Ex + 0.67 \times En]$  comprende los “elementos claves”, el cual abarca el 60.65% de la dispersión. Por su parte, la incertidumbre del pronóstico puede ser explicada por la hiperentropía, como una especie de espesor vertical de la nube.

Para el desarrollo del *Delphi*<sub>EMN</sub> se requiere de dos algoritmos: uno para generar cierta nube normal compuesta por  $N$  gotas, y otro que exprese una especie de síntesis de todas las nubes correspondientes a cada experto. El primero de estos algoritmos se presenta siguiendo a Li y Du [23, p. 119] y a Li, Liu y Gan [24, p. 363]. En efecto:

*Algoritmo 1.* Generador de Nube Normal GNN(*Ex*, *En*, *He*,  $N$ ).

Entrada: Tres parámetros *Ex*, *En*, *He*, y el número de gotas  $N$  de la nube.

Salida:  $N$  gotas de la nube con su grado de incertidumbre.

Pasos:

1. Se genera un número aleatorio  $En'_i$  distribuido normalmente, cuya esperanza es *En* y su varianza  $He^2$ .
2. Se genera un número aleatorio  $x_i$  distribuido normalmente, cuya esperanza es *Ex* y su varianza  $(En'_i)^2$ .

3. Se calcula el grado de incertidumbre:  $y_i = \varphi(t_i) = e^{-\frac{(t_i - Ex)^2}{2(En)^2}}$
4. Se obtiene la  $i$ -ésima gota  $drop(t_i, y_i)$  de la nube.
5. Se repite el ciclo 1-4, hasta generar las  $N$  gotas.

Con ayuda del algoritmo anterior, Yang, Zeng y Zhang [40] desarrollan un mecanismo para la generación de una nube sintética, la cual explica el comportamiento global de cada nube particular, conforme a las operaciones de suma y producto de nubes, introducidas por Li y Du [23]. Para diferenciar el grado de incidencia de cada experto en la conformación de la nube sintética, Yang, Zeng y Zhang [40] establecen un mecanismo de ponderación basado en la consistencia y la estabilidad del juicio emitido por un experto tras la sucesión de rondas Delphi. Cada peso individual se determina de modo inversamente proporcional a una suma de tres componentes: el valor modular normalizado de la diferencia entre las expectativas individual y colectiva, la borrosidad del juicio, y la incertidumbre. Así, a partir de  $n$  nubes  $\tilde{A}_i(Ex_i, En_i, He_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , las cuales corresponden respectivamente a cada uno de  $n$  expertos, resulta una nube promedio ponderada  $\tilde{A}_{wa}(Ex_{wa}, En_{wa}, He_{wa})$ . El algoritmo para la generación de nubes sintéticas es el siguiente [40]:

**Algoritmo 2.** Delphi de Nube Normal DNN( $Ex, En, He, N$ ).

**Entrada:** Tres parámetros  $Ex, En, He$ , y el número de gotas  $N$  de la nube, así como  $i$  segmentos  $[l_i^{(k)}, u_i^{(k)}] \subset \mathbb{R}$ , que constituyen las evaluaciones del panel de  $i$  expertos ( $1 \leq i \leq n$ ) en la ronda  $k$ , de una variable a pronosticar.

**Salida:** La nube sintética  $\tilde{A}_{wa}^{(k)}$  basada en la ponderación  $w_i$  de cada experto, y un par de índices de estabilidad para cada experto  $i$ , después de la ronda  $k$ :  $\Delta En_i^{(k)}$  e  $Inc_i^{(k)}$ .

**Pasos:**

1. Se inicia el contador de iteración ( $k = 1$ ).
2. Se obtiene una nube de  $N$  gotas  $GNN_i^{(k)}(Ex_i^{(k)}, En_i^{(k)}, He_i^{(k)}, N)$ , para la respuesta  $k$ -ésima del experto  $i$ -ésimo, donde  $Ex_i^{(k)} = \frac{1}{2}(u_i^{(k)} + l_i^{(k)})$ ,  $En_i^{(k)} = \frac{1}{6}(u_i^{(k)} - l_i^{(k)})$ . En el caso  $He_i^{(k)}$ , si  $k = 1$ , entonces  $He_i^{(1)} = \frac{1}{K}En_i^{(1)}$ , donde  $K$  es una constante predefinida. Si  $k > 1$ , entonces  $He_i^{(k)} = \frac{1}{6}[\max\{u_i^{(k)} - u_i^{(k-1)}, 0\} - \max\{l_i^{(k-1)} - l_i^{(k)}, 0\}]$ .
3. Se calculan los componentes

$$w_i^{(k)} = \frac{1}{\left| \frac{Ex_i^{(k)} - Ex_s^{(k)}}{Ex_s^{(k)}} \right| + En_i^{(k)} + He_i^{(k)}}$$

los cuales se normalizan por intermedio de  $w_i^{(k)} = w_i^{(k)} / \sum_{1 \leq i \leq n} w_i^{(k)}$ .

4. Se genera información retroalimentada (*feedback*) por medio de dos procedimientos de agregación: uno para determinar la nube sintética  $\tilde{A}_s^{(k)} = GNN_s^{(k)}(Ex_s^{(k)}, En_s^{(k)}, He_s^{(k)}, N)$ , y otro para expresar cada nube promedio ponderada  $\tilde{A}_{wa}^{(k)} = GNN_{wa}^{(k)}(Ex_{wa}^{(k)}, En_{wa}^{(k)}, He_{wa}^{(k)}, N)$ , donde  $1 \leq i \leq n$ .
5. Se calculan dos índices para controlar la estabilidad del juicio experto: uno consiste en la diferencia normalizada entre entropías consecutivas ( $\Delta En$ ), y el otro es el grado normalizado de incertidumbre ( $Inc$ ). Se calculan como sigue, para  $1 \leq i \leq n$ :

$$\begin{cases} \Delta En_i^{(k)} = \frac{En_i^{(k-1)} - En_i^{(k)}}{En_i^{(k-1)}}, & \Delta En_i^{(1)} = En_i^{(1)} \\ Inc_i^{(k)} = \frac{He_i^{(k)}}{En_i^{(k)}} \end{cases}$$

6. Se establece la condición de parada  $\Delta En_i^{(k)} \leq \delta$ , donde el valor de  $\delta$  se fija de antemano, e  $Inc_i^{(k)} = 0$ . En caso de que un experto no cumpla dichas condiciones, el experimentador adopta decisiones puntuales.
7.  $k \leftarrow k + 1$ , dando paso a la siguiente ronda Delphi.

En el segundo paso del Algoritmo 2, la expresión de  $He_i^{(k)}$  trata de captar en qué medida el juicio del experto  $i$  permanece estable, tras dos iteraciones sucesivas  $k - 1$  y  $k$ . Si la respuesta  $k$ -ésima produce un intervalo que es subconjunto del  $(k - 1)$ -ésimo, resulta que  $He_i^{(k)} = 0$  para el experto  $i$ . En todos los restantes casos se obtiene un valor mayor que cero. Además, a mayor incertidumbre/aleatoriedad, mayor será la hiperentropía. En la práctica se elige  $K = 6$ , como un valor práctico para esta constante [40].

## 2.2 Participantes y contexto del estudio

La investigación se desarrolló en la Universidad de Holguín (UHo, Cuba), durante el periodo de calificación del examen de ingreso a la educación superior, correspondiente al curso escolar 2020-2021 en la asignatura de Matemática. Desde hace más de tres décadas, este tipo de examen tiene como propósito jerarquizar el otorgamiento de carreras conforme a un escalafón, y también elevar la calidad del ingreso a la educación terciaria en el país. Los temarios tienen carácter nacional y cuentan con cinco preguntas, cada una de 20 puntos.

Para lograr uniformidad, tradicionalmente se provee una clave de calificación que se aplica rigurosamente y se revisa al menos por tres calificadores diferentes.

El proceso se desarrolló durante un periodo de “nueva normalidad”, tras la primera oleada de la pandemia ocasionada por la COVID-19. En esta ocasión, el Departamento de Matemática de la UHo conformó un equipo de 56 evaluadores para calificar más de 1400 estudiantes. Cada uno de los evaluadores fue designado tras un proceso riguroso de selección, con base en la experiencia docente, el desarrollo de habilidades profesionales, la ética y la responsabilidad. Tomando en consideración este aspecto, el panel de expertos quedó conformado por todo el equipo de evaluadores. Por razones de seguridad y transparencia, este proceso se desarrolló en un edificio de la UHo habilitado al efecto. Ello implicó la solicitud de aprobación del presente estudio, el cual fue debidamente asentido por las autoridades universitarias correspondientes.

### 2.3 Instrumento para el pronóstico de resultados de promoción

Para efectuar un estudio comparado del  $Delphi_{EDP}$  y del  $Delphi_{EMN}$ , fue necesario conformar un instrumento que pudiese aprehender información requerida por ambos en un mismo dispositivo. El instrumento diseñado consta de cinco preguntas, como ilustra la Figura 1.

Estimado/a profesor/a:	
Como parte de una investigación científica, solicitamos de su amable colaboración. Por favor, responda a las siguientes preguntas, con base en su valiosa experiencia:	
<i>Preguntas</i>	<i>Sitio para las respuestas</i>
1. Según su criterio, ¿cuál será el % mínimo de aprobados para esta prueba de ingreso? Su respuesta puede aproximarse hasta un lugar decimal.	<input type="text"/> %
2. Según su criterio, ¿cuál será el % máximo de aprobados para esta prueba de ingreso? Su respuesta puede aproximarse hasta un lugar decimal.	<input type="text"/> %
3. Según su criterio, ¿cuál será el % más probable de aprobados para esta prueba de ingreso? Su respuesta puede aproximarse hasta un lugar decimal.	<input type="text"/> %
4. Respecto a la tercera pregunta, ¿cuán seguro/a está de que su respuesta será acertada? Marque con una equis (X) en la casilla que corresponda.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Muy inseguro/a <span style="float: right;">Muy seguro/a</span>
5. Respecto a la tercera pregunta, ¿cuán seguro/a está de que no existe un valor más probable dentro del intervalo delimitado por las dos primeras respuestas? Marque con una equis (X) en la casilla que corresponda.	<input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> Muy inseguro/a <span style="float: right;">Muy seguro/a</span>
Le estamos muy agradecidos por su atenta colaboración.	

Figura 1. Instrumento para el pronóstico de resultados en una prueba de ingreso

En la primera ronda Delphi, el instrumento es diligenciado antes de que los expertos tengan acceso al examen y a su clave de calificación (cuestionario № 1). Después de acceder a la mencionada información, se diligencia una segunda versión del mismo instrumento, en una segunda y última ronda (cuestionario № 2). Por tanto, la retroalimentación no procede de una fuente interna al proceso, sino que depende de la experiencia de los expertos, de su conocimiento acerca de los resultados históricos en este tipo de examen, al nivel de complejidad de la prueba y las particularidades de la clave de calificación, entre otros aspectos. De forma expedita se solicita no alterar los resultados consignados en el primer cuestionario. Al culminar, cada experto guarda ambos cuestionarios en un sobre habilitado al efecto.

Tomando ventaja de que cada uno de los salones designados para el proceso de calificación contó con un coordinador responsable, se solicitó la evaluación de cada experto bajo la escala 1 = medio, 2 = alto, 3 = muy alto. Estos valores se consideraron como ponderaciones  $\lambda_i$ , del escalar  $\lambda$  correspondiente al experto  $i$ , en el sentido del producto externo referido en la Definición 2. Obviamente, los criterios de selección previa de los

evaluadores permiten descartar categorías ordinales inferiores, tales como “bajo” y “muy bajo”. En cada caso el coordinador consignó uno de estos valores en los sobres anónimos tras ser recepcionados, conforme a su apreciación de la experiencia y nivel profesional de cada experto.

## 2.4 Variables intervinientes en el estudio

Bajo el modelo difuso pitagórico, las tres primeras preguntas del instrumento delimitan el dominio  $X$  de un número triangular, mientras que las dos últimas definen la correspondiente imagen  $P$ . Por su parte, el intervalo que demarcan las dos primeras preguntas expresa la entropía ( $En$ ) bajo el modelo de nube. Asimismo, como expectativa ( $Ex$ ) se toma cada punto medio, mientras que la hiperentropía ( $He$ ) resulta de las diferencias entre las respuestas en dos aplicaciones consecutivas del mismo instrumento. A partir de aquí, puede comprenderse que cada pronóstico del por ciento de aprobados queda definido de dos modos diferentes: mediante números difusos pitagóricos, con un valor explícito de menor vaguedad; y mediante nubes normales dependientes de parámetros, donde el valor más probable es una medida implícita de tendencia central.

## 2.5 Procesamiento de los datos

El procesamiento de la información se llevó a cabo con ayuda del lenguaje estadístico R de código abierto [34]. Particularmente, tomando en consideración ciertas complejidades técnicas de los algoritmos requeridos para el modelo de nube, se empleó la función *CloudDelphi* desarrollada en [6]. Una copia del código implementado se anexa al final del presente trabajo.

## 3. RESULTADOS

La Tabla 1 contiene la totalidad de los datos obtenidos tras la aplicación del instrumento. Se visualizan las variables del *Delphi*<sub>EDP</sub>, ya que las requeridas por el *Delphi*<sub>EMN</sub> constituyen un subconjunto de estas. Puede apreciarse, en primer lugar, que la evaluación global del panel de expertos alcanza un valor promedio de  $\lambda = 2.43$ , de manera que se localiza por encima de un nivel alto.

Tabla 1. Resultados de la aplicación del instrumento

$i$	Expertos	$\lambda_i$	Cuestionario № 1					Cuestionario № 2				
			$\underline{a}_i^{(1)}$	$\bar{a}_i^{(1)}$	$a_i^{(1)}$	$\mu_i^{(1)}$	$v_i^{(1)}$	$\underline{a}_i^{(2)}$	$\bar{a}_i^{(2)}$	$a_i^{(2)}$	$\mu_i^{(2)}$	$v_i^{(2)}$
1	3	3	50.0	70.0	62.0	0.7	0.6	55.0	67.0	64.0	0.8	0.7
2	1	1	68.0	92.0	85.0	0.6	0.6	80.0	92.5	90.0	0.7	0.7
3	3	3	55.0	75.0	65.0	0.8	0.6	57.0	80.0	75.0	0.7	0.5
4	3	3	50.5	63.5	59.0	0.8	0.7	50.5	60.0	58.0	0.8	0.8
5	3	3	60.0	75.0	66.0	0.5	0.1	60.0	66.0	63.0	0.3	0.1
6	3	3	42.0	68.0	56.0	1.0	0.6	44.0	65.0	58.0	0.9	0.4
7	3	3	42.0	70.0	62.0	0.7	0.3	45.0	75.0	62.0	0.5	0.5
8	3	3	52.4	66.3	58.9	0.7	0.7	56.8	69.0	62.0	0.9	0.8
9	3	3	56.0	65.0	58.0	0.1	0.1	56.0	65.0	58.0	0.1	0.1
10	3	3	60.5	70.0	65.0	0.2	0.4	50.0	70.0	68.0	0.4	0.4
11	3	3	62.0	75.0	68.0	0.1	1.0	65.0	78.0	72.0	0.1	1.0
12	3	3	46.3	75.8	60.2	0.6	0.3	50.3	88.6	71.0	0.5	0.5
13	3	3	40.0	65.0	60.0	0.9	0.8	45.0	65.0	60.0	0.8	0.8
14	3	3	45.0	72.5	65.0	0.9	0.9	45.0	75.0	70.0	0.8	0.8
15	2	2	60.0	75.0	79.0	1.0	1.0	60.0	75.0	79.0	1.0	1.0
16	3	3	53.0	65.0	58.0	0.5	0.4	53.0	65.0	58.0	0.5	0.5
17	1	1	60.0	70.0	67.0	0.4	0.9	60.0	70.0	67.0	0.5	1.0



18	3	60.0	80.0	75.0	0.2	0.5	65.0	80.0	75.0	0.4	0.4
19	1	69.0	75.0	72.5	0.5	0.5	71.0	77.0	75.2	0.6	0.6
20	3	33.3	85.0	72.0	0.2	0.5	40.0	85.0	75.8	0.2	0.6
21	3	63.5	70.5	65.0	1.0	1.0	69.5	70.5	65.0	1.0	1.0
22	3	70.0	80.0	75.0	0.9	0.3	65.0	68.0	65.0	0.9	0.2
23	3	70.0	75.0	60.0	0.1	0.1	65.0	70.0	70.0	0.1	0.1
24	1	40.0	60.0	50.0	0.6	0.6	40.0	60.0	50.0	0.7	0.7
25	3	60.0	70.0	65.0	0.1	0.1	60.0	70.0	65.0	0.1	0.1
26	2	80.5	90.8	85.5	0.4	0.4	80.5	90.8	85.5	0.4	0.4
27	3	40.0	70.0	55.0	0.5	0.5	40.0	70.0	55.0	0.4	0.4
28	1	40.0	90.0	60.0	0.8	0.7	40.0	90.0	60.0	0.9	0.8
29	3	0.0	100.0	50.0	0.4	0.4	0.0	100.0	50.0	0.4	0.4
30	3	55.0	85.0	70.0	0.5	0.5	60.0	90.0	75.0	0.6	0.6
31	3	30.8	65.0	55.3	0.3	0.9	35.0	60.0	50.0	0.3	1.0
32	2	50.0	75.0	64.0	0.8	0.6	50.0	75.0	64.0	0.7	0.7
33	3	30.0	75.0	60.0	1.0	0.1	30.0	75.0	60.0	1.0	0.1
34	1	60.0	75.0	70.0	1.0	0.2	60.0	75.0	70.0	0.9	0.2
35	2	30.0	80.0	60.0	0.7	0.6	40.0	80.0	65.0	0.8	0.7
36	3	45.0	85.0	65.0	0.1	0.3	45.0	85.0	65.0	0.4	0.8
37	3	50.0	70.0	60.0	0.4	0.5	50.0	80.0	62.0	0.6	0.6
38	3	20.0	40.0	30.0	0.4	0.4	20.0	40.0	30.0	0.4	0.4
39	1	40.0	82.0	60.0	0.7	0.4	40.0	80.0	60.0	0.8	0.8
40	3	50.0	80.0	60.0	0.9	0.7	50.0	80.0	60.0	0.7	0.7
41	1	60.0	90.0	85.0	0.2	0.7	80.0	99.0	90.0	0.3	0.7
42	1	70.0	80.0	75.0	0.9	0.9	60.0	70.0	65.0	0.9	0.9
43	1	60.0	80.0	75.0	0.5	0.4	60.0	80.0	70.0	0.5	0.5
44	1	50.0	70.0	55.0	0.8	0.8	40.0	65.0	70.0	1.0	1.0
45	2	50.0	70.0	60.0	0.4	0.4	50.0	70.0	60.0	0.8	0.8
46	3	50.0	75.0	60.0	0.7	0.7	50.0	75.0	60.0	0.8	0.8
47	3	60.0	75.0	65.0	1.0	1.0	60.0	70.0	65.0	1.0	1.0
48	3	80.5	85.1	82.5	0.7	0.7	80.5	86.5	84.3	0.8	0.7
49	2	75.0	85.0	70.0	1.0	0.2	70.0	80.0	70.0	0.8	0.2
50	1	60.0	70.0	65.0	0.4	0.5	60.0	70.0	65.0	0.4	0.5
51	3	72.5	80.3	75.8	0.8	0.7	72.5	80.3	75.8	0.8	0.7
52	3	50.0	60.0	52.0	0.7	0.8	50.0	60.0	52.0	0.7	1.0
53	3	60.0	75.0	72.0	0.5	1.0	70.0	80.0	75.0	0.6	0.9
54	2	58.0	88.0	60.0	0.6	0.9	55.0	85.0	59.0	0.7	0.8
55	2	35.0	70.0	50.0	0.7	0.2	50.0	70.0	64.0	0.8	0.4
56	3	50.0	95.0	80.0	0.4	0.4	65.0	95.0	75.0	0.4	0.4
Promedio	2.43	52.34	75.35	64.57	0.59	0.56	53.96	75.24	65.85	0.62	0.61

La Figura 2 refleja el caso particular del primer experto ( $i = 1$ ). En el  $Delphi_{EDP}$  ya ha sido considerado el efecto de la ponderación correspondiente para  $\lambda_1 = 3$ . Las líneas discontinuas representan los resultados de la primera

ronda, donde el modelo pitagórico es aplicable plenamente pues  $\mu^2 + \nu^2 = 0.7^2 + 0.6^2 = 0.85 \leq 1$ . El valor de indeterminación observado es  $\pi_{\tilde{\lambda}} = \sqrt{1 - 0.85} = 0.53$ , el cual es mitigado como consecuencia de la ponderación.

En efecto, el valor de la función de pertenencia  $\mu_{\lambda_{\tilde{A}}} = \mu_{3_{\tilde{A}}} = \sqrt{1 - (1 - 0.7^2)^3} = 0.93$  crece acercándose a la unidad, mientras que el de no pertenencia  $\nu_{\lambda_{\tilde{A}}} = \nu_{3_{\tilde{A}}} = 0.6^3 = 0.22$  decrece acercándose a cero. Luego, para valores no inferiores a  $\lambda_0 = \lambda_0(0.93, 0.22) = 0.40$ , resulta  $\pi_{3_{\tilde{A}}} = \sqrt{1 - 0.93^2 + 0.22^2} = 0.29 < 0.53 = \pi_{\tilde{\lambda}}$  y la indeterminación disminuye. En realidad, para el cálculo del promedio global se utiliza cada escalar  $\lambda_i$ , normalizado por la suma de todas las evaluaciones. En el caso del primer experto, esto es  $\lambda_1' = \lambda_1 / \sum_{i=1}^{56} \lambda_i = 3/136 = 0.02$ .

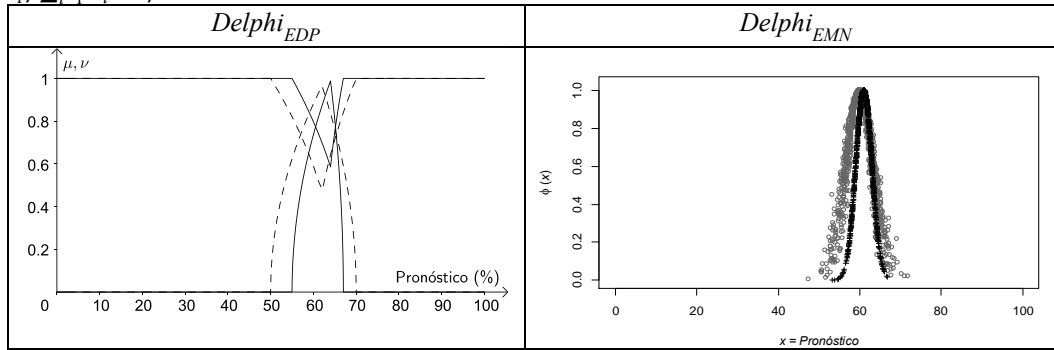


Figura 2. Representación gráfica de las respuestas del primer experto

Por su parte, las líneas continuas representan lo ocurrido en la segunda ronda, pero en este caso el modelo pitagórico no se satisface ya que  $\mu^2 + \nu^2 = 0.8^2 + 0.7^2 = 1.13 > 1$ . Este hecho ocurrió en 19 ocasiones durante la primera ronda (33.93%), y luego en 24 ocasiones durante la segunda ronda (42.86%). El modelo difuso pitagórico no explicó plenamente las observaciones empíricas. Por tanto, su aplicación en el *Delphi<sub>EDP</sub>* debe adoptarse con cautela, donde los resultados deben asumirse con ciertas reservas.

Para el mismo caso, la Figura 2 también refleja lo acontecido en las respuestas del primer experto con sendas nubes formadas por  $N = 1000$  gotas. La primera ronda produce la nube representada con gotas grises, mientras que las gotas negras corresponden a la segunda ronda. A su vez, esta nube más oscura y de menor espesor constituye la nube sintética para un único individuo. El modelo solo utiliza los rangos estimados por el experto en cada respuesta. En la primera ocasión, el experto indica el intervalo  $[50, 70]$ , de modo que la expectativa es el promedio  $Ex_1^{(1)} = \frac{1}{2}(50 + 70) = 60$ , la entropía es  $En_1^{(1)} = \frac{1}{6}(70 - 50) = 3.33$  y la hiperentropía es  $He_1^{(1)} = \frac{1}{6}En = 0.56$ , como corresponde a la primera ronda ( $k = 1$  y  $K = 6$ , en el segundo paso del Algoritmo 2). Nótese que la arbitrariedad de la constante  $K$  solo influye en el espesor de la nube, así que tiene un carácter relativo que resulta útil para la comparación de nubes. Ya en la segunda ronda, el intervalo señalado por el experto es  $[55, 67]$ , y entonces  $Ex_1^{(2)} = \frac{1}{2}(55 + 67) = 61$ ,  $En_1^{(2)} = \frac{1}{6}(67 - 55) = 2$ ,  $He_1^{(2)} = \frac{1}{6}[\max\{67 - 70, 0\} - \max\{50 - 55, 0\}] = 0$ .

A diferencia del *Delphi<sub>EDP</sub>*, que modela básicamente la imprecisión y la vaguedad, el *Delphi<sub>EMN</sub>* enfatiza la incertidumbre a partir de la evidencia objetiva que expresan las respuestas. En este último caso, la disminución de la incertidumbre viene dada por el decrecimiento que experimenta la hiperentropía, la cual se anula en la segunda ronda ya que el intervalo propuesto está contenido completamente en el primero. O sea, bajo el modelo de nube, mejor certidumbre equivale al refinamiento del pronóstico.

Por su parte, la variación en el pronóstico propiamente dicho se obtiene de forma explícita en el *Delphi<sub>EDP</sub>*, donde el experto primero sugiere  $\bar{a}_1^{(1)} = 62$  en la primera ronda, y luego  $\bar{a}_1^{(2)} = 64$  en la segunda ronda. No obstante, bajo la mirada del *Delphi<sub>EMN</sub>*, este pronóstico más probable se obtiene de manera implícita, como promedio del intervalo de mayor probabilidad, donde la expectativa cambia en menor cuantía de  $Ex_1^{(1)} = 60$  a  $Ex_1^{(2)} = 61$ . Obviamente la respuesta del experto no responde plenamente a una distribución normal. Este comportamiento también se aprecia de manera global, donde los valores medios de  $a_i^{(1)}$  y  $a_i^{(2)}$  ( $1 \leq i \leq 56$ ) son iguales a 64.57 y 65.85, respectivamente en cada ronda (véase la última fila de la Tabla 1). Sin embargo, los valores centrales de los intervalos medios observados  $[52.34, 75.35]$  y  $[53.96, 75.24]$  son iguales a 63.84 y 64.60, respectivamente.

Ambas disparidades son relativamente pequeñas para un pronóstico de porcentaje concebido en base a 100. Para comprobar el nivel de significación de estas diferencias, en cada ronda se comparó el conjunto de valores medios de los intervalos observados, con los promedios respectivos observados. El test de Wilcoxon reveló que, en ambos casos, la comparación entre pares de muestras relacionadas no produce diferencias significativas ( $Z_{Ronda 1} = -1.03, p = 0.30 > 0.05$  y  $Z_{Ronda 2} = -1.79, p = 0.07 > 0.05$ , con base en rangos positivos). En fin, no existe evidencia empírica tangible que permita descartar que la no coincidencia, entre los valores medios de cada intervalo y el valor más probable declarado en ambas rondas, solo obedece al azar. Ya que no puede descartarse un comportamiento normal, el empleo del modelo de nube resulta razonable, pero no excepto de ciertas reservas.

En relación al pronóstico global, se procedió conforme a lo dispuesto en ambos enfoques. Para el caso del  $Delphi_{EDP}$  se utilizó el promedio establecido en la Definición 5, ponderado con los valores normalizados de los escalares  $\lambda_i$ . Para el  $Delphi_{EMN}$  se siguió el Algoritmo 2, donde la nube sintética basa su ponderación en los índices definidos para controlar la estabilidad del juicio experto ( $\Delta En$  e  $Inc$ ). La Figura 3 resume ambos resultados.

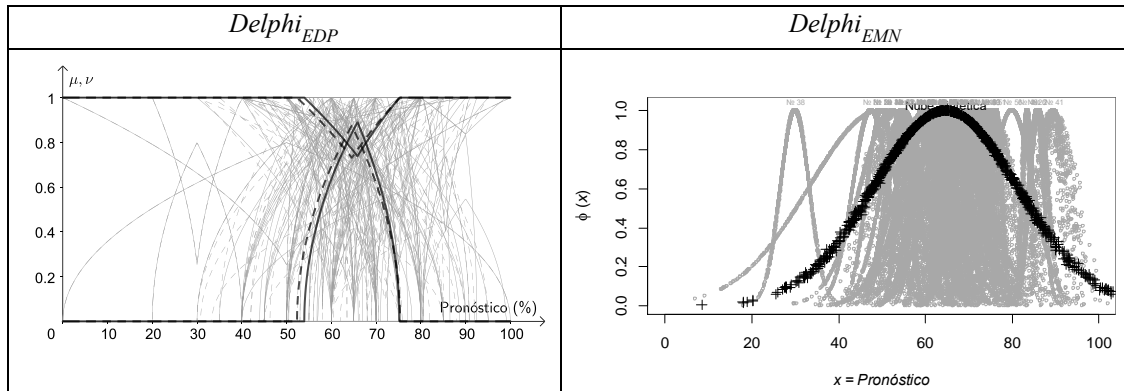


Figura 3. Resultados globales en ambas rondas de pronóstico

En el  $Delphi_{EDP}$  las líneas discontinuas muestran el pronóstico a priori (primera ronda), mientras que las líneas continuas reflejan el pronóstico a posteriori (segunda ronda). Las líneas más oscuras muestran los valores promedio. Nótese que las funciones de pertenencia tienden a crecer y las de no pertenencia tienden a decrecer. Por tanto, se evidencia mayor nivel de seguridad en la opinión colectiva, después de haber accedido al examen y a su clave de calificación. Los valores de pronóstico medio, en ambas rondas, aparece resumido en la Tabla 2. Nótese que la incertidumbre global disminuye, pero muy ligeramente (apenas un 0.7%).

Tabla 2. Resultados globales según el  $Delphi_{EDP}$

Ronda	Mínimo	Valor más probable	Máximo	Valor de pertenencia	Valor de no pertenencia	Vaguedad
1	52.38	64.61	75.32	0.66	0.54	0.8528
2	54.18	65.95	75.35	0.69	0.50	0.8521

Respecto al  $Delphi_{EMN}$ , la representación responde a la etapa conclusiva, ya que se utilizan los resultados de ambas rondas para el cálculo de los elementos constitutivos de las nubes de cada experto en particular, y de la nube sintética en general. La función *CloudDelphi* ha sido implementada para la generación de nubes compuestas por 1000 gotas. La mayoría de las respuestas se concentra en una región relativamente común. Existen respuestas atípicas, como en el caso de los expertos № 38 y № 41. El primero, con una posición relativamente pesimista y estable, a diferencia del segundo que es más optimista, aunque inestable en sus apreciaciones prospectivas. Ambos sujetos se diferencian en cuanto a consistencia, pues el primero tiene una hiperentropía baja ( $He = 0.00$ ), a diferencia del segundo ( $He = 1.50$ ). La mayoría de las respuestas expresan intervalos de amplitud relativamente pequeña. Un caso anómalo lo muestra el experto № 29, con el mayor valor de entropía ( $En = 16.67$ ), ocasionado por indicar en ambas ocasiones el universo de valores posibles (ver Tabla 1). Si bien no se descartan problemas en la comprensión del instrumento, este tipo de respuesta también puede evidenciar otros aspectos subjetivos como el temor a asumir riesgos, la ausencia de compromiso con el estudio, e incluso negligencia en la conducta bajo situaciones de anonimato. La nube sintética constituye una expresión del comportamiento global y sus parámetros se resumen en la Tabla 3.

Tabla 3. Resultados globales según el  $Delphi_{EMN}$

Parámetros de la nube sintética	Denominación	Valor
$Ex$	Expectativa	64.60
$En$	Entropía	16.67
$He$	Hiperentropía	0.33
$w$	Peso	1.00
$\Delta En$	Diferencia normalizada entre entropías consecutivas	16.67
$Unc$	Grado normalizado de incertidumbre	1.00

Puede apreciarse que el valor de la expectativa es notablemente cercano al valor más probable obtenido en la primera ronda, y ligeramente inferior al obtenido en la segunda ronda ( $Ex = 64.60 < 64.61 < 65.95$ ). Después de sumar y restar la entropía, se obtiene un rango de certidumbre dentro del intervalo  $[47.93, 81.27]$ , más alargado que los intervalos comprendidos entre los mínimos y los máximos promedios en ambas rondas, conforme al  $Delphi_{EDP}$ . Bajo el supuesto de normalidad, este intervalo explica aproximadamente el 68.27% de las observaciones. Al calcular el intervalo restringido sugerido por Li y Yi (2008), se obtiene  $[53.43, 75.77]$ . Este último explica el 60.65% y es muy similar al calculado para el  $Delphi_{EDP}$  en la segunda ronda ( $[53.96, 75.24]$ ).

Ambos modelos han sido implementados para el procesamiento de información subjetiva, proveída por un panel de expertos. Si se toma en consideración información objetiva, confirmada por los resultados de promoción acontecidos, cabe preguntarse qué pronóstico se tendría para 2020. Para responder a esta pregunta

se tomó la cronológica valores alcanzados provincia Holguín, el periodo 2019. La Figura 4 los resultados aplicación modelo

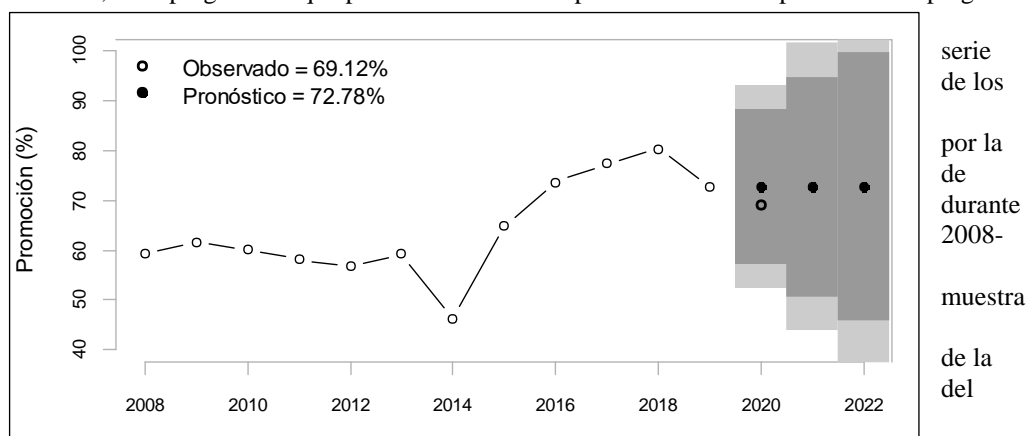


Figura 4. Modelo ARIMA(0, 1, 0) en la serie cronológica de resultados de promoción ARIMA(0, 1, 0) de paseo aleatorio. Las regiones sombreadas representan valores de confianza del 95% (gris más fuerte) y 99% (gris más tenue). Conforme a este modelo, el valor esperado para 2020 es igual a 72.78% dentro del intervalo  $[57.25, 88.31]$ , para un 95% de confianza ( $\sigma^2 = 62.77$ , función de verosimilitud  $\mathcal{L}(\theta|x) = -38.38$ , criterio de información de Akaike corregido AICc = 79.20, criterio de información bayesiano BIC = 79.15). El resultado real de promoción en 2020 fue de un 69.12% (el valor observado en la Figura 4), de modo que la diferencia respecto al valor esperado alcanza 3.66 unidades porcentuales y se encuentra dentro del intervalo señalado.

#### 4. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Si se comparan los pronósticos con respecto al porcentaje de promoción real obtenido en la prueba de ingreso en 2020 (69.12%), se tiene el siguiente ordenamiento basado en las respectivas distancias euclidianas:  $Delphi_{EMN} < ARIMA < Delphi_{EDP}$ . O sea, el mejor resultado corresponde al valor más cercano al porcentaje real. Desde el punto de vista práctico, la economía de recursos logísticos y de tiempo favorecen al modelo ARIMA, el cual apenas requiere de la serie cronológica ya conocida y produce un resultado razonablemente bueno. Sin embargo, el estudio tiene lugar en el marco de una situación coyuntural e inusual, provocada por la pandemia de la COVID-19, con restricciones propias del confinamiento, situaciones de estrés e inseguridad, cambios drásticos hacia un sistema de educación virtual, entre otras limitaciones. Este escenario podría incidir negativamente en los resultados de promoción, bajo efectos que no dependen del azar. Por tanto, cobra valor el estudio comparado de métodos basados en información subjetiva, como la percepción prospectiva de un panel

de expertos. La Tabla 4 resume algunos de los elementos fundamentales de ambos enfoques para el método Delphi:

Tabla 4. Comparación de ambos enfoques para el método Delphi

Criterio	<i>Delphi</i> <sub>EDP</sub>	<i>Delphi</i> <sub>EMN</sub>
VARIABLES fundamentales	Basadas en números difusos pitagóricos triangulares $\tilde{a} = (X(\underline{a}, a, \bar{a}), P(\mu, \nu))$ . Enfatizan la imprecisión y la vaguedad	Basadas en nubes normales compuestas determinadas por la expectativa ( <i>Ex</i> ), la entropía ( <i>En</i> ) y la hiperentropía ( <i>He</i> ). Enfatizan la incertidumbre
Parámetros adicionales	Escalares de ponderación $\lambda$ proveídos por agentes externos	Valores de adecuación gráfica <i>K</i> y <i>N</i> , prefijados por los investigadores
Medidas a controlar	Valor de indeterminación $\pi_{\tilde{A}}$ y distancia difusa $d(\tilde{A}, \tilde{B})$	Diferencia normalizada de entropías ( $\Delta En$ ) y grado normalizado de incertidumbre ( <i>Inc</i> )
Ponderación	Externa, basada en la evaluación de cada experto (parámetro $\lambda$ )	Interna, basada en la conducta de cada experto (peso <i>w</i> )
Modelo matemático subyacente	Esquema continuo, basado en números difusos pitagóricos de tipo triangular, donde $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$	Esquema discreto, basado en gotas de una nube con distribución normal, donde $t \sim N(Ex, (En')^2)$ y $En' \sim N(En, (He)^2)$
Información de salida	Un número difuso pitagórico triangular, donde el dominio expresa el pronóstico más probable dentro de un rango estimado, mientras que la imagen refleja el nivel de vaguedad	Una nube sintética centrada en el valor más probable, donde la elongación expresa el grado de dispersión, mientras que el espesor refleja el grado de incertidumbre
Intervalo de confianza y su interpretación	$[\underline{a}, \bar{a}]$ donde la función de pertenencia es mayor que cero ( $\mu > 0$ )	$[Ex - 0.67 \times En, Ex + 0.67 \times En]$ que explica el 60.65% de la variabilidad

Con base en este paralelo, puede apreciarse que tampoco el mejor resultado proviene del enfoque más sencillo. Por el contrario, el *Delphi*<sub>EDP</sub> requiere de mayor volumen de información empírica y sus gráficos son más difíciles de interpretar. Adicionalmente, las evidencias experimentales demostraron que la conducta seguida por dos de cada cinco expertos no obedece al requisito  $\mu^2 + \nu^2 \leq 1$ , de modo que el modelo pitagórico no se ajustó plenamente a la realidad. Estudios recientes han erigido un fundamento matemático para números difusos intuicionistas donde, en general,  $\mu^\delta + \nu^\delta \leq 1$  para  $\delta \in \{1, 2, 3, \dots\}$  [17]. Bajo este enfoque sería suficiente elegir un  $\delta$  mínimo tal que todas las evidencias empíricas satisfagan el modelo. Sin embargo, este camino complica aún más el procesamiento de la información.

Tampoco debe obviarse la subjetividad inherente a la evaluación de cada experto por un solo individuo (el respectivo coordinador responsable, en cada salón asignado). Se trata de especialistas de amplia experiencia, pero ello no los exime de apreciaciones ligeras, desconocimientos puntuales sobre determinados expertos, entre otros elementos que disminuyen la objetividad en el conjunto de los escalares de ponderación  $\lambda$ . Las evidencias experimentales no reflejan distorsiones sensibles que pudieran ser atribuidas a este hecho, ya que son relativamente pequeñas las diferencias respecto a los valores obtenidos en los tres modelos. Este aspecto debe ser controlado en estudios futuros, a fin de lograr mayor consistencia en los resultados.

Finalmente, el *Delphi*<sub>EMN</sub> responde a un algoritmo previamente automatizado, donde el cambio perceptivo del panel no siempre es visible como en el caso anterior. En efecto, para visualizar dos nubes sintéticas se requerirían tres rondas Delphi, de modo que cada nube responda a un valor de hiperentropía basado en evidencias empíricas (de la segunda respecto a la primera, y de la tercera respecto a la segunda). Por otra parte, el nivel de incertidumbre no crece monótonamente al alejarse del valor central, sino que alcanza su valor máximo en ciertos puntos simétricos entre este y los límites del universo de discurso [39]. El intervalo sugerido por Li y Du [23], trata de evitar las zonas de mayor incertidumbre, pero apenas explica el 60.65% de la variabilidad. Por tanto, el nivel de certidumbre del resultado obtenido se ve afectado ante elevados valores de entropía. Si bien en el presente estudio no se encontraron evidencias empíricas que permitan rechazar un comportamiento normal en la conducta de los expertos, tampoco los resultados del test de Wilcoxon aportan evidencias enfáticas que así lo sugieran, especialmente en la segunda ronda ( $p = 0.3043 > 0.05$  y  $p = 0.0734 > 0.05$ , respectivamente).

Como puede apreciarse, ambos enfoques del método Delphi se diferencian en cuanto a la forma en que captan, procesan y exportan la información. Aunque ofrecen intervalos de confianza similares, sus capacidades de pronóstico no superan las técnicas tradicionales basadas en series temporales. Sin embargo, las evidencias experimentales sugieren que pueden constituir un recurso alternativo ante situaciones inusuales, donde el empleo de información diacrónica no queda completamente justificado. Ambos enfoques tienen ventajas y desventajas, las cuales deben ser tomadas en cuenta antes de seguir uno de estos enfoques del método prospectivo Delphi orientado hacia el pronóstico. La Tabla 5 expresa un paralelo relacionado con elementos prácticos y epistémicos, relativos a ambos enfoques.

Tabla 5. Paralelo de ambos enfoques bajo una mirada pragmática

Aspecto	<i>Delphi</i> <sub>EDP</sub>	<i>Delphi</i> <sub>EMN</sub>
Contextos de aplicación	Situaciones de pronóstico, donde no existe evidencia histórica documentada, ni información estadística suficiente o confiable. Se plantean escenarios relativamente nuevos, con niveles de complejidad que involucran una pluralidad de perspectivas. No existen datos expresados de forma diacrónica, lo cual impide la aplicación de modelos basados en series temporales. Se cuenta con expertos capaces de proveer información veraz y oportuna, cimentada por su amplia experiencia y profesionalidad.	
Énfasis gnoseológico	Se explora la vaguedad e imprecisión de la información que proveen los expertos, bajo un paradigma intuicionista.	Se pondera la incertidumbre presente en el proceso.
Principales obstáculos	Se requiere mayor volumen de información empírica. Los gráficos son difíciles de interpretar, lo cual se complejiza de modo significativo a partir de una tercera ronda. La simplificación basada en números difusos pitagóricos triangulares implica pérdida de información en el modelo. Existe situaciones que no se ajustan al modelo pitagórico.	Alta sensibilidad a los cambios de opinión de una ronda a otra. Equiparación apriorística de los niveles de experticia. Elevado nivel de complejidad del modelo matemático, lo cual se refleja en el diseño de los gráficos con ayuda de paquetes computacionales. El nivel de certidumbre se ve afectado ante elevados valores de entropía.
Oportunidades prácticas	La utilización de números difusos pitagóricos triangulares simplifica los gráficos. Facilidades de representación gráfica en paquetes orientados al cálculo numérico. Posibilidades de aplicación de modelos $\delta$ -fuzzy generalizados.	Menor cantidad de información empírica requerida. La interpretación de los gráficos se apoya en parámetros descriptivos. Facilidades de interpretación en entornos de dos a tres rondas.

Con base en el análisis anterior, la selección o desestimación de un enfoque no determinista del Delphi de pronóstico, estará mediada por elementos contextuales y orientada por preceptos epistémicos. Sin embargo, el tipo de enfoque seleccionado dependerá más específicamente del propio diseño de cada investigación, donde se potencian las oportunidades y se despliegan recursos que atenúen los obstáculos correspondientes.

**AGRADECIMIENTOS:** La investigación ha sido financiada parcialmente por los proyectos № P223HO908-001 de la Universidad de Holguín (Cuba), y № 2018203 de la Universidad Antonio Nariño (Colombia), en el marco del convenio de colaboración científica entre ambas instituciones. Los autores agradecen a las autoridades universitarias de la Facultad de Informática y Matemática de la UHo, por las facilidades otorgadas para el desarrollo del estudio experimental, en el marco de un examen de ingreso a la educación superior. También se agradecen las observaciones de árbitros anónimos que contribuyeron al perfeccionamiento del presente trabajo.

**RECEIVED: APRIL, 2021.**  
**REVISED: SEPTEMBER, 2021.**

#### REFERENCIAS

- [1] ATANASSOV, K. T. (1986): Intuitionistic fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, 20, 87–96. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(86\)80034-3](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(86)80034-3)
- [2] ATANASSOV, K. T. (1999): **Intuitionistic Fuzzy Sets**. Physica-Verlag, Berlin <https://doi.org/10.1007/978-3-7908-1870-3>
- [3] BUSTINCE, H., and BURILLO, P. (1996): Vague sets are intuitionistic fuzzy sets, **Fuzzy Sets and Systems**, 79, 403–405. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(95\)00154-9](https://doi.org/10.1016/0165-0114(95)00154-9)
- [4] BUSTINCE, H., FERNÁNDEZ, J., HAGRAS, H., HERRERA, F., PAGOLA, M., and BARRENECHEA, E. (2015): Interval type-2 fuzzy sets are generalization of interval-valued fuzzy sets: towards a wider view on their relationship. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 23, 1876–1882 <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2014.2362149>
- [5] CABLES, E. H., LAMATA, M. T., and VERDEGAY, J. L. (2018): The reference ideal method and the Pythagorean fuzzy numbers. **Fuzzy Optimization and Modelling**, 1, 31–40. [http://fomj.qaemiau.ac.ir/article\\_545712.html](http://fomj.qaemiau.ac.ir/article_545712.html)
- [6] CRUZ, M. (2020): Una función en R para el método Delphi de nube. Aplicaciones al pronóstico educacional. **Tecnología Educativa**, 5, 95–107. <https://tecedu.uho.edu.cu/index.php/tecedu/article/view/210/153>
- [7] CRUZ, M., DÍAZ, Y., RÚA, J. A., ROJAS, O. J. (2020): Estudio cuantitativo de una red de coautoría en educación matemática. Un análisis de sus campos de investigación basado en el método Delphi. **Revista Española de Documentación Científica**, 43, Article e281. <https://doi.org/10.3989/redc.2020.4.1727>

- [8] CRUZ, M., and RÚA, J. A. (2018): Surgimiento y desarrollo del método Delphi: una perspectiva cuantitativa. **Biblios**, 71, 90–107. <https://doi.org/10.5195/biblios.2018.470>
- [9] DESCHRIJVER, G., and KERRE, E. E. (2003): On the relationship between some extensions of fuzzy set theory. **Fuzzy Sets and Systems**, 133, 227–235. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(02\)00127-6](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00127-6)
- [10] DEVADOSS, A. V., SUDHA, K., and AJAY, D. (2014): The application of Delphi adapted (weighted) bidirectional associative memories (DABAM) in the analysis of women empowerment through capabilities. **International Journal of Fuzzy Mathematics and Systems**, 4, 73–80. [https://www.ripublication.com/ijfms/ijfmsv4n1\\_08.pdf](https://www.ripublication.com/ijfms/ijfmsv4n1_08.pdf)
- [11] FLOSTRANDA, A., PITT, L., and BRIDSON, S. (2020): The Delphi technique in forecasting— A 42-year bibliographic analysis (1975–2017). **Technological Forecasting and Social Change**, 150, Article 119773. <https://doi.org/10.1016/j.techfore.2019.119773>
- [12] GARIBALDI, J. M., JAROSZEWSKI, M., and MUSIKASUWAN, S. (2008): Nonstationary fuzzy sets. **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 16, 1072–1086. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.917308>
- [13] GAU, W. L., and BUEHRER, D. J. (1993): Vague sets, **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 23, 610–614. <https://doi.org/10.1109/21.229476>
- [14] GLUMAC, B., HAN, Q., SMEETS, J., and SCHAEFER, W. (2011): Brownfield redevelopment features: applying fuzzy Delphi. **Journal of European Real Estate Research**, 4, 145–159. <https://doi.org/10.1108/17539261111157316>
- [15] GOGUEN, J. (1967): L-fuzzy sets. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 18, 145–174. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90189-8](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90189-8)
- [16] GORZALCZANY, M. B. (1987): A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets. **Fuzzy Sets and Systems**, 21, 1–17. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(87\)90148-5](https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90148-5)
- [17] HIDALGO, D., MELIN, P., CASTILLO, O., and LICEA, G. (2010): Comparative study of type-2 fuzzy inference system optimization based on the uncertainty of membership functions. In P. Melin, J. Kacprzyk, W. Pedrycz (Eds.), **Soft Computing for Recognition Based on Biometrics. Studies in Computational Intelligence** (Vol. 312, pp. 103–120), Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-15111-8\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-15111-8_7)
- [18] HUANG, H.-C., and YANG, X. (2016) : A comparative investigation of type-2 fuzzy sets, nonstationary fuzzy sets and cloud models. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 24, 213–227: <https://doi.org/10.1142/S0218488516500112>
- [19] JAFARNEJAD, A., MOMENI, M., RAZAVI, S. H., and FARIDI, M. (2019): A dynamic supply chain resilience model for medical equipment’s industry. **Journal of Modelling in Management**, 14, 816–840. <https://doi.org/10.1108/JM2-11-2018-019>
- [20] JAMKHANEH, E.B., and GARG, H. (2017): Some new operations over the generalized intuitionistic fuzzy sets and their application to decision-making process. **Granular Computing**, 3, 111–122. <https://doi.org/10.1007/s41066-017-0059-0>
- [21] KUMAR, A., and DASH, M. K. (2017): Using fuzzy Delphi and generalized fuzzy TOPSIS to evaluate technological service flexibility dimensions of internet malls. **Global Journal of Flexible Systems Management**, 18, 153–161. <https://doi.org/10.1007/s40171-017-0154-8>
- [22] LEE, K. M., LEE, K.-M., and CIOS, K. (2004): Comparison of interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, and bipolar-valued fuzzy sets. **Journal of Korean Institute of Intelligent Systems**, 14, 125–129. <https://doi.org/10.5391/JKIS.2004.14.2.125>
- [23] LI, D., and DU, Y. (2016): **Artificial Intelligence with Uncertainty** (2nd ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/9781315366951>
- [24] LI, D., LIU, C., and GAN, W. (2009): A new cognitive model: cloud model. **International Journal of Intelligent Systems**, 24, 357–375. <https://doi.org/10.1002/int.20340>
- [25] LIXĂNDROIU, D., and LIXĂNDROIU, R. (2013): Using fuzzy models in managerial decision. In A. R. Thomas, N. Al, and P. C. Bratianu (Eds.), **The Changing Business Landscape of Romania: Lessons for and from Transition Economies** (pp. 263–284). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6865-3\\_15](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6865-3_15)
- [26] ÖZKAN, B., KAYA, I., ERDOĞAN, M., and KARASAN, A. (2019): Evaluating blockchain risks by using a MCDM methodology based on Pythagorean fuzzy sets. In C. Kahraman et al. (Eds.), **Intelligent and Fuzzy Techniques in Big Data Analytics and Decision Making (INFUS 2019). Advances in Intelligent Systems and Computing** (Vol. 1029, pp. 935–943). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-23756-1\\_111](https://doi.org/10.1007/978-3-030-23756-1_111)

- [27] PAL, N. R. (1999): On quantification of different facets of uncertainty. **Fuzzy Sets and Systems**, 107, 81–91. [https://doi.org/10.1016/S0165-0114\(98\)00005-0](https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00005-0)
- [28] QIN, Y., LIU, Y., and HONG, Z. (2017): Multicriteria decision making method based on generalized Pythagorean fuzzy ordered weighted distance measures. **Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**, 33, 3665–3675. <https://doi.org/10.3233/JIFS-17506>
- [29] RAJAPRAKASH, S., and PONNUSAMY, R. (2015): Ranking business scorecard factor using intuitionistic fuzzy analytical hierarchy process with Delphi Fuzzy in automobile sector. In R. Prasath, A. Vuppala, and T. Kathirvalavakumar (Eds.), **Mining Intelligence and Knowledge Exploration. Lecture Notes in Computer Science** (Vol. 9468, pp. 437–448). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-26832-3\\_41](https://doi.org/10.1007/978-3-319-26832-3_41)
- [30] ROY, T. K., and GARAI, A. (2012): Intuitionistic fuzzy Delphi method: more realistic and interactive forecasting tool. **Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets**, 12, 37–50. <http://ifigenia.org/images/0/06/NIFS-18-2-37-50.pdf>
- [31] SÁNCHEZ, A. P., CAVAZOS, J., and ALBAVERA, C. (2014): Aproximación fuzzy Delphi para determinar los factores socioecológicos que influyen en la adherencia a la mastografía en áreas rurales de México. **Cadernos de Salude Publica**, 30, 245–258. <https://doi.org/10.1590/0102-311X00025113>
- [32] SHABANI, A., and JAMKHANEH, E. B. (2014): A new generalized intuitionistic fuzzy number. **Journal of Fuzzy Set Valued Analysis**, 2014, 1–10. <https://doi.org/10.5899/2014/jfsva-00199>
- [33] SHORA, A. R., ALAM, M. A., and BISWAS, R. (2012): A comparative study of fuzzy and intuitionistic fuzzy techniques in a knowledge based decision support. **International Journal of Computer Applications**, 53, 13–16. <https://doi.org/10.5120/8433-2205>
- [34] THE R FOUNDATION FOR STATISTICAL COMPUTING (2021): **The R Project for statistical computing** (Version 4.0.4) [Computer software]. R. <https://r-project.org>
- [35] TURKSEN, I. B. (1986): Interval valued fuzzy sets based on normal forms. **Fuzzy Sets and Systems**, 20, 191–210. [https://doi.org/10.1016/0165-0114\(86\)90077-1](https://doi.org/10.1016/0165-0114(86)90077-1)
- [36] XU, Q., and XU, K. (2018): Assessment of air quality using a cloud model method. **Royal Society Open Science**, 5, Article 171580. <https://doi.org/10.1098/rsos.171580>
- [37] YAGER, R. R. (1988): On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making. **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 18, 183–190. <https://doi.org/10.1109/21.87068>
- [38] YAGER, R. R. (2013): Pythagorean fuzzy subsets. In **Proceedings of the Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS)** (pp. 57–61), IEEE. <https://doi.org/10.1109/IFSA-NAFIPS.2013.6608375>
- [39] YANG, X., YANG, L., and ZENG, L. (2013): How to handle uncertainties in AHP: The Cloud Delphi hierarchical analysis. **Information Sciences**, 222, 384–404. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2012.08.019>
- [40] YANG, X.-J., ZENG, L., and ZHANG, R. (2012): Cloud Delphi method. **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 20, 77–97. <https://doi.org/10.1142/S0218488512500055>
- [41] YILDIZ, A., AYYILDIZ, E., GUMUS, A. T., and OZKAN, C. (2021): A modified balanced scorecard based hybrid Pythagorean fuzzy AHP-topsis methodology for ATM site selection problem. **International Journal of Information Technology and Decision Making**, 67, 449–467. <https://doi.org/10.1142/S0219622020500017>
- [42] ZADEH, L. A. (1965): Fuzzy sets. **Information and Control**, 8, 338–353. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(65\)90241-X](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X)
- [43] ZADEH, L. A. (1975): The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-I. **Information Sciences**, 8, 199–249. [https://doi.org/10.1016/0020-0255\(75\)90036-5](https://doi.org/10.1016/0020-0255(75)90036-5)
- [44] ZENG, S. (2017): Pythagorean fuzzy multiattribute group decision making with probabilistic information and OWA approach. **International Journal of Intelligent Systems**, 32, 1136–1150. <https://doi.org/10.1002/int.21886>
- [45] ZHANG, X., and XU, Z. (2014): Extension of TOPSIS to multiple criteria decision making with Pythagorean fuzzy sets. **International Journal of Intelligent Systems**, 29, 1061–1078. <https://doi.org/10.1002/int.21676>



## ANEXO

### Código en R de la función *CloudDelphi*

En este anexo se presenta el código de la función *CloudDelphi*, escrito en lenguaje estadístico R (tomado de [6] con algunas modificaciones). Puede copiarse todo el código que sigue en la consola de R, sin necesidad de cargar paquetes adicionales. Al final aparece un ejemplo de nube sintética, a partir de las nubes correspondientes a seis expertos.

```
# CloudDelphi Function

CloudDelphi = function(CurrentIntervals, ForegoingIntervals, ForegoingEntropy,
  Min = 10, Max = 80, K = 6, Upper = TRUE, Lower = TRUE,
  Expectation = TRUE, Uncertainty = TRUE,
  DropExpertType = 1, DropSyntecticType = 3,
  DropExpertSize = .6, DropSyntecticSize = 1,
  CloudExpertIteration = 1000, CloudSyntecticIteration = 1000,
  CloudSyntecticColor = "black", CloudExpertColor = "grey66",
  DecimalPlaces = 2) {

# Debugging data

IntervalError = FALSE
if (length(CurrentIntervals)==0 || length(CurrentIntervals)/2!=round(length(CurrentIntervals)/2))
  IntervalError = TRUE andand stop("There are some error in data", call. = FALSE) else
  Experts=length(CurrentIntervals)/2
for (i in 1:Experts) if (CurrentIntervals[2*i]-CurrentIntervals[2*i-1]<0) IntervalError = TRUE
if (length(ForegoingIntervals)!=0 andand length(ForegoingIntervals)!=length(CurrentIntervals)) IntervalError = TRUE
if (length(ForegoingIntervals)==length(CurrentIntervals)) for (i in 1:Experts)
  if (ForegoingIntervals[2*i]-ForegoingIntervals[2*i-1]<0) IntervalError = TRUE
if (length(CurrentIntervals)!=2 andand length(ForegoingEntropy)!=0 andand
  length(ForegoingEntropy)!=Experts andand length(ForegoingEntropy)!=Experts+1) IntervalError = TRUE
if (length(CurrentIntervals)==2 andand (length(ForegoingEntropy)>2 || length(ForegoingEntropy)>1)) IntervalError = TRUE

# Calculating expectation, entropy, hyper-entropy and weight

if (IntervalError) stop("There are some error in data", call. = FALSE) else {
  Ex_i=En_i=He_i=c(1:Experts)
  for (i in 1:Experts) {Ex_i[i]=-(CurrentIntervals[2*i]+CurrentIntervals[2*i-1])/2
    En_i[i]=(CurrentIntervals[2*i]-CurrentIntervals[2*i-1])/6}
  if (length(ForegoingIntervals)==0) for (i in 1:Experts) He_i[i]=En_i[i]/K else
    for (i in 1:Experts) He_i[i]=(max(CurrentIntervals[2*i]-ForegoingIntervals[2*i],0)
      +max(ForegoingIntervals[2*i-1]-CurrentIntervals[2*i-1],0))/6}
  Ex_s = mean(Ex_i)
  En_s = (max(Ex_i+3*En_i)-min(Ex_i-3*En_i))/6
  He_s = mean(He_i)
  Weight = c(1:Experts)
  for (i in 1:Experts) Weight[i] = 1/(abs((Ex_i[i]-Ex_s)/Ex_s)+En_i[i]+He_i[i])
  SumWeight = sum(Weight)
  for (i in 1:Experts) Weight[i] = Weight[i]/SumWeight

# Calculating the stability indices of expert judgment

DeltaEntropyIndex = UncertaintyIndex = c(0:Experts+1)
if (length(ForegoingEntropy)!=0) {for (i in 1:Experts) DeltaEntropyIndex[i] = abs(ForegoingEntropy[i] - En_i[i])/ForegoingEntropy[i]
  DeltaEntropyIndex[Experts+1] = abs(ForegoingEntropy[Experts+1] - En_s)/ForegoingEntropy[Experts+1]} else {
  DeltaEntropyIndex[1:Experts] = En_i
  DeltaEntropyIndex[Experts+1] = En_s}
UncertaintyIndex = He_i/En_i
UncertaintyIndex[Experts+1] = He_s/En_s

# Assembling data as matrix

Round = cbind(Ex_i, En_i, He_i, Weight, DeltaEntropyIndex[1:Experts], UncertaintyIndex[1:Experts])
Round = rbind(Round,c(Ex_s, En_s, He_s, 1, DeltaEntropyIndex[Experts+1], UncertaintyIndex[Experts+1]))
dimnames(Round) = list(c(), c("Ex", "En", "He", "w", paste("Δ", "En", sep=""), "Unc"))
rownames(Round) = rownames(Round, do.NULL=FALSE, prefix="Exp_")
rownames(Round)[Experts+1] = "Exp_s"
Round = t(Round)
```

```

# Preparing coordinate system

windows(width = 16, height = 9)
plot(0, 0, type="n", xaxt="s", yaxt="s", ylim=c(0,1.03), xlim=c(Min,Max),
     xlab="x", ylab="μ(x)", main="Cloud Delphi")

# Generating the Cloud function

Cloud = function(Ex, En, He, Color, Type, Size, N,
                 CurveE=FALSE, CurveU=FALSE, CurveL=FALSE, CurveI=FALSE)
{P = array(0, dim=c(N,2))
  i = 1
  while (i <= N)
  {
    Em_i = rmorm(1, mean=En, sd=He)
    X_i = rmorm(1, mean = Ex, sd=Em_i)
    Mu_i = sqrt(2*pi)*Em_i*dnorm(X_i, mean=Ex, sd=Em_i)
    P[i,1] = X_i
    P[i,2] = Mu_i
    i = i+1
  }
  points(P, col=Color, pch=Type, cex = Size)
  D1 = En-3*He
  D2 = En+3*He
  E = function(x) {sqrt(2*pi)*En*dnorm(x, Ex, En)}
  U = function(x) {sqrt(2*pi)*D2*dnorm(x, Ex, D2)}
  L = function(x) {sqrt(2*pi)*(D1)*dnorm(x, Ex, D1)}
  I = function(x) {U(x)-L(x)}
  if (CurveE) {curve(E(x), add=TRUE, col="green")}
  if (CurveU) {curve(U(x), add=TRUE, col="red", lty=2, lwd=1)}
  if (CurveL) {curve(L(x), add=TRUE, col="blue", lty=2, lwd=1)}
  if (CurveI) {curve(I(x), add=TRUE, col="magenta")
    D3 = 2*D2*D1*sqrt((log(D2)-log(D1))/(D2^2-D1^2))
    X1 = Ex-D3
    X2 = Ex+D3
    segments(X1, L(X1), X1, U(X1), col=6, lty=1, lwd=4)
    segments(X2, L(X2), X2, U(X2), col=6, lty=1, lwd=4)
    text(X1+(Max-Min)*.13, (L(X1)+U(X1))/2, "Maximum uncertainty",
         col = "magenta")
    arrows(X1+(Max-Min)*.005, (L(X1)+U(X1))/2, X1+(Max-Min)*.05,
           (L(X1)+U(X1))/2, length = .1, angle=20, code=1, col="magenta")
  }
  par(new=TRUE)
  if (CurveE | CurveU | CurveL | CurveI)
  legend(.86*(Max-Min)+Min, .97, c(ifelse(CurveE, "Upper", ""),
    ifelse(CurveU, "Lower", ""),
    ifelse(CurveL, "Expectation", ""),
    ifelse(CurveI, "Uncertainty", "")),
    col = c(2,4,3,6), text.col = c(2,4,3,6),
    lty = c(2*CurveE, 2*CurveU, 1*CurveL, 1*CurveI),
    pch = NA, bg = "white")
}

# Plotting each expert's clouds and the synthetic cloud

if (Experts!=1) {for (i in 1:Experts) Cloud(Round[1,i], Round[2,i], Round[3,i],
     CloudExpertColor, DropExpertType, DropExpertSize,
     CloudExpertIteration)}
Cloud(Ex_s, En_s, He_s, CloudSyntecticColor, DropSyntecticType, DropSyntecticSize,
     CloudSyntecticIteration, Upper, Lower, Expectation, Uncertainty)
if (Experts!=1) {text(Round[1,Experts+1], 1.04, colnames(Round)[Experts+1],
     col=CloudSyntecticColor)
  for (i in 1:Experts) text(Round[1,i], 1.04, colnames(Round)[i],
     col=CloudExpertColor)
  } else text(Round[1,Experts+1], 1.04, "Normal cloud generated",
     col=CloudSyntecticColor)

# Constructing the output matrix

```

```
round(Round, DecimalPlaces)
}

# An example of a synthetic cloud based on six experts

a = c(58,64, 20,26, 20,30, 31,33, 62,68, 71,79) # CurrentIntervals
b = c(57,63, 19,23, 20,31, 32,33, 61,72, 73,82) # ForegoingIntervals
c = c(0.61, 0.30, 1.00, 0.22, 1.09, 1.50, 1.95) # ForegoingEntropy
CloudDelphi(a, b, c)
```