ANÁLISIS COMPARATIVO ENTRE MODELOS DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA RESTRINGIDA PARA MANEJO DE INVENTARIOS. CASO DE ESTUDIO EN EL CLÚSTER MANUFACTURERO CARTAGENERO

Bruno de Jesús Rahmer[1], José Solana Garzón, Hernando Garzón Saénz, Gustavo Ortiz Piedrahita
Facultad de Ingeniería. Fundación Universitaria Tecnológico Comfenalco. Cartagena, Colombia.

ABSTRACT
The supply chain is a network that integrates logistics and supply activities in service providers or companies that offer tangible goods. For this reason, it is necessary to control the resources that the company conserves for their subsequent use in the manufacturing process, or to satisfy the final demand. Stock management is a key operation to produce competitive advantages. In this study a comparative analysis is carried out between various inventory models for a company in the Cartagena manufacturing cluster. Mathematical programming techniques are used in order to guarantee a continuous operational flow. Results indicate that the solutions provided by the dynamic programming model produce an inventory management policy with an optimal cost level.

KEYWORDS: Inventory Management, Manufacturing Cluster, Dynamic Programming, Mixed Integer Programming, Stochastic Programming.

MSC: 90B05

RESUMEN
La cadena de suministro es un entramado de operaciones que integra las actividades logísticas, estratégicas y de aprovisionamiento en entidades prestadoras de servicios o que ofertan bienes tangibles. De allí se deriva la necesidad de ejercer un control apropiado sobre los recursos tangibles que conserva la empresa para su uso ulterior en el proceso de manufacturación, o bien, para destinarlos a satisfacer la demanda final. Es por ello, que la gestión y manejo de esta fracción significativa de activos, es una operación clave para fraguar ventajas competitivas. En el presente estudio se efectúa un análisis comparativo entre diversos modelos de inventario para una entidad localizada en el clúster manufacturero cartagenero. Los modelos en cuestión son diseñados a partir de sendas técnicas de programación matemática restringida, en procura de amortiguar la presión que un entorno mercantil altamente volátil ejerce sobre el sistema productivo y garantizar un flujo operacional exento de disrupciones. Los resultados arrojados indican que las soluciones obtenidas con el cómputo del modelo de programación dinámica producen una política de manejo de inventario con un nivel de costo óptimo.

PALABRAS CLAVE: Administración de inventarios, Clúster manufacturero, Programación dinámica, Programación entera mixta, Programación estocásticas.

1. INTRODUCCIÓN

En pleno siglo XXI el fenómeno de la globalización irrumpe como un proceso coyuntural cuya influencia permea variadas esferas como la socioeconómica, política e incluso el panorama cultural de la civilización occidental. En este escenario, indudablemente variante y plagado de incertidumbre, se ha generado una atmósfera ideal que amplifica el nivel de interdependencia entre sectores económicos, forzados a evolucionar continuamente para desenvolverse de forma apropiada ante las exigencias que le son impuestas. Se colige que, para la organización moderna, es una necesidad imperiosa concentrar sus esfuerzos para flexibilizar y enlazar entre sí sus estructuras internas en función de la captura de valor y de mantener sistemáticamente ventajas competitivas diferenciales sostenibles en la progresión temporal. Ello, por supuesto, implica la instrumentación de estrategias corporativas novedosas, así como también, la alineación de sus operaciones en procura de satisfacer las necesidades manifiestas de los consumidores (Garzón Saénz, Solana Garzón, & Rahmer, 2017). Por las razones expuestas anteriormente se considera perentorio la articulación y configuración de una cadena de suministro flexible, pues ello determinará parcialmente el éxito y el posicionamiento competitivo de la empresa en el futuro inmediato. Aquí se conjugan todas las actividades direccionadas a la coordinación sistémica y estratégica de las operaciones

[1] brunodejesus.2509@gmail.com

esenciales (producción, administración de inventarios, transporte, procesamiento de pedidos, etc.) que están orientadas a la generación de valor. Una de las labores críticas en el contexto de la cadena de suministro es la administración de los inventarios, pues los escenarios económicos hipercompetentes, cargados de una acrecentada incertidumbre, repercuten en el margen de maniobra de los distintos niveles jerárquicos de la organización, sobre todo en el operativo (Aref & Abolfazl, 2018).
En la cadena de suministro están incardinadas todas las fases de planificación y en consecuencia, cada proceso interno en el ámbito empresarial es afectado por este subsistema. La gestión de inventarios implica todo un conglomerado de actividades direccionadas a la coordinación del flujo de materiales, la gestión de proveedores, adquisición de materias primas e insumos, atención al cliente y otros, (Sheakh, 2018), procesos indispensables para garantizar el funcionamiento óptimo de los eslabones de la cadena y operaciones generadoras de valor. Para la prestación de un servicio se hace necesario el uso de instalaciones de apoyo, bienes facilitadores, servicios explícitos y servicios implícitos. En cambio, un propósito fundamental del diseño de la cadena de suministro para los fabricantes es controlar el inventario mediante la administración de los flujos de materiales (Bu, Yao, & Gong, 2020).
Es consabido que el objetivo esencial de la administración de stock es proporcionar los bienes en el plazo que sean requeridos. La situación ideal sería que el flujo de entrada de materiales fuese equivalente al flujo de los salientes, pero en la praxis, tal situación es improbable. Así que un objetivo realista, podría ser mantener un nivel mínimo de stock para evitar el agotamiento de recursos que produzcan discontinuidades en el proceso productivo. Las decisiones típicas para el manejo de inventarios son soportadas a través de técnicas cuantitativas que se circunscriben en el ámbito la investigación de operaciones (Hardy, Bhakoo, & Steve, 2020) (Hong Min, Zacharia, & Smith, 2019). El desarrollo de sistemas computacionales integrados también es útil para efectuar los procesos de planificación de la cadena de suministro, desde una perspectiva multipartita.
Sin ánimo de exhaustividad puede reportarse una síntesis documentaria de estudios publicados anteriormente sobre modelos cuantitativos, aplicados en el dominio de la gestión de inventarios. En ese sentido Conviene, reseñar propuestas laudables en las cuales se reporta el uso de técnicas heurísticas (Nambirajan, Mendoza, & Pazhani, 2020) (Kheiri, 2020), de programación matemática restringida o versiones modificadas de los modelos de tradicionales para determinación del tamaño de inventario (Sinha, Modak, & Sana, 2020) (Sánchez Pineda & Ramírez Torres, 2018). Otros estudios que merecen ser reseñados corresponden a aquellos en los cuales se incorpora dentro del análisis el carácter difuso de la demanda (Aref & Abolfazl, 2018) y se evalúa el performance del modelo de stock construido bajo tal escenario.
A tenor de lo expuesto antecedentemente, se pretende desarrollar un análisis comparativo entre modelos de inventario para un conjunto de empresas localizadas en el clúster manufacturero cartagenero, espacio geográfico en el cual se registran escasos estudios de alto impacto que evidencien la aplicación de métodos cuantitativos para la anticipación de los requerimientos de producción y dimensionamiento de lotes. Estas actividades son indispensables para la formulación de acciones *sui generis*, que le otorgan capacidad a la empresa actuar proactivamente y responder a las contingencias que inciden negativamente en la continuidad del proceso productivo (Peng, Hui, Shen, Liao, & Xue, 2020). Para los efectos de esta investigación se toman como inputs las proyecciones agregadas de la demanda y en la fase posterior se dispone de una batería de técnicas de programación matemática restringida útiles para el diseño de los modelos de inventario.

2. METODOLOGÍA

En la primera fase de la investigación se capturan los datos de la demanda proyectada para seis periodos consecutivos. Para el análisis de las existencias inventariadas se agrega el volumen de bienes vendidos en toneladas de material manufacturado. La extracción de un subconjunto representativo de datos permitirá que las conclusiones y los resultados que se obtengan a partir de este, puedan ser generalizables y extrapolables a la totalidad de los periodos referenciales. La selección de una unidad de agregación cualquiera se realiza con el objeto de homogeneizar las unidades demandadas y facilitar la construcción de los modelos de dimensionamiento de stocks. Sólo se recaban los datos históricos de ventas consolidadas en los cinco años precedentes al actual, para determinar las proyecciones de la demanda. Tales, servirán como input para el desarrollo de diversos modelos de inventario que incluyen en su estructura fundamental componentes tales como: costos de mantenimiento de inventario, que están ligados al almacenamiento de las existencias. Para el cálculo de este parámetro es necesario computar los siguientes costos: los costos de capital, que incluyen el costo de oportunidad del capital invertido para mantener el inventario y el interés sobre el capital de trabajo; se incluyen, además, los costos incurridos por almacenamiento de existencias (servicios públicos, impuestos sobre la locación, etc.). También se calculan los costos asociados al servicio de inventarios y al riesgo de desvalorizaciones (mermas, obsolescencias, daños, etc.). Se incluyen también en los modelos, los costos de penalización por insatisfacción de los requerimientos de la demanda, en caso tal de que existan. Se anota que, debido a restricciones en la infraestructura y de tipo operacional, no se mantiene stock de seguridad para esta especie de producto, pues su estancia en el almacén, en intervalos temporales prolongados resulta altamente costosa. Los costos unitarios por concepto de compras son constantes, pues están directamente relacionados con la cantidad de materiales e insumos necesarios para producir las unidades demandadas. No se computan descuentos, en tanto que, en términos agregados, el volumen de unidades pedidas es reducido.

Subsecuentemente, se realizará un análisis comparativo de los modelos de stock desarrollados y se seleccionará aquel que cumpla con un criterio de optimalidad o algún criterio adicional, que se especifique a priori, de manera que, las decisiones que se deriven de la resolución del modelo, satisfagan las restricciones naturales y limitantes del sistema productivo. Para la construcción de los modelos de inventario se disponen de técnicas de programación matemática determinística y estocástica.

2.1 Enfoque de programación dinámica

La programación dinámica es una técnica matemática que, partiendo de una definición recursiva, permite la resolución de problemas de optimización a través de la combinación de subestructuras óptimas y el solapamiento de subproblemas. No sigue ninguna forma estandarizada y funciona bajo un esquema ascendente denominado "*bottom-up*" en el que, anticipadamente, se halla la solución de los problemas más reducidos para disponer de ellos en la ulterior resolución de problemas de mayor magnitud.

Un modelo de programación dinámica tal y como el que se usará para la determinación de un programa de inventario con costo mínimo, está basado en el uso de ecuaciones funcionales que constan de: un criterio de comparación entre los posibles valores que asumen las variables de estado, que se denomina función objetivo, y que inicia en una etapa j hasta la culminación del horizonte temporal; y finalmente, de una función que interrelaciona un par de etapas sucesivas y las condiciones de frontera.

Considérese las siguientes secuencias $\{S_k\}_{k=0}^{N}, \{C_k\}_{k=0}^{N-1}$ y $\{D_k\}_{k=0}^{N-1}$ de los espacio-estados aleatorios $S_k, 0 \leq k \leq n$, los espacios de control $C_k, 0 \leq k \leq n-1$ y los espacios de perturbación $D_k, 0 \leq k \leq n-1$. Así, dado un estado inicial $x_0 \in S_0$ se asume que los estados $x_k \in S_k, 0 \leq k \leq N$ evolucionan acorde al sistema temporal discreto expresado por:

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k),, 0 \leq k \leq N-1$$

Donde $f_k: S_k \times C_k \times D_k \to S_{k+1}, 0 \leq k \leq N-1$

Los controles u_k satisfacen $u_k \in \mu_k(x_k) \subset C_k$, $0 \leq k \leq N-1$, mientras que las perturbaciones aleatorias w_k $0 \leq k \leq N-1$ pueden ser descritas por la distribución de probabilidad $P_k(\cdot|X_k, \mu_k), 0 \leq k \leq N-1$ que depende del control u_k y del estado x_k.

Para los instantes de tiempo $, 0 \leq k \leq N-1$, las decisiones respecto a la elección de los controles se realizan en función de las leyes de control

$$\mu_k: S_k \to S_k\,, u_k = \mu_k(x_k)\ 0 \leq k \leq N-1$$

Que conduce a la política de control dada por:

$$\pi = \{\mu_0, \mu_1, \mu_2 \ldots\ \mu_{N-1}\}$$

Los costos funcionales que están asociados a las decisiones en los tiempos $, 0 \leq k \leq N-1,$ son:

$$g_k: S_k \times C_k \times D_k \to \mathbb{R}, 0 \leq k \leq N-1$$

Y los costos terminales

$$g_N: S_N \to \mathbb{R}$$

Sea entonces el problema de minimización en el que el valor esperado E es tomado sobre la totalidad de estados aleatorios y perturbaciones aleatorias

$$\min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0) = E\left[g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(\mu_k(x_k)w_k)\right]v$$

Sujeto a $x_{k+1} = f_k(\mu_k(x_k)w_k), 0 \leq k \leq N-1$ y Π el conjunto de políticas óptimas.

Dado un estado inicial, $J^{*}(x_0) \min\limits_{\pi\in\Pi} J_\pi(x_0)$ será la función de costo óptimo. Si existe una política admisible entonces $J^{*}(x_0) = J_{\pi^*}(x_0)$, siendo π^* la política óptima.
Considérese ahora el problema de inventario:

$$\min_{\pi\in\Pi} J_\pi(x_0) = E\left[R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1}(r(\mu_k) + c\mu_k(w_k))\right]$$

Sujeto a:

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k(x_k) - w_k \ \ , \ \ 0 \le k \le N-1$$
$$\mu_k(x_k) \ge 0 \ , \qquad 0 \le k \le N-1$$

en el cual se asume que existen unos estados x_k, un conjunto de variables control μ_k. Las demandas futuras serán w_k enteros no negativos, idénticamente distribuidos.
De modo que las probabilidades de satisfacer cantidad demandada es desigual para todos los periodos de planificación $(k, k+1)$ y serán $p(w_k = \alpha) = \rho_\alpha$, $p(w_k = \beta) = \rho_\beta$, $p(w_k = \delta) = \rho_\delta$, $p(w_k = \varepsilon) = \rho_\varepsilon$, $p(w_k = \theta) = \rho_\theta$, $p(w_k = \vartheta) = \rho_\vartheta$.
El exceso de demanda $w_k - x_k - \mu_k$ se pierde y se establece una cota del total de la demanda del periodo referencial como inventario de reserva.
Se asume en este caso que el costo terminal y de mantenimiento viene dado por la expresión $r(x_k) = (x_k + \mu_k - w_k)^2$
Mientras que g_k, $0 \le k \le N-1$ vendrá dada por

$$g_k(x_k, \mu_k, w_k) = \mu_k(x_k + \mu_k - w_k)^2$$
$$g_N(x_N) = 0$$

2.2 Enfoque de programación estocástica

Para proporcionar una extensión estocástica al problema de inventario no capacitado y con horizonte finito, éste se expresa como problema de planificación dinámica de inventarios con costos lineales. En este sentido, se construye un árbol de escenarios con etapas, que caracteriza la evolución de los datos inciertos en el horizonte de planificación. En este árbol, los nodos de cada etapa (o nivel) constituyen los estados que se distinguen por la información disponible hasta el momento. Se computa la probabilidad asociada a los estados representados en cada nodo y se define la etapa de tiempo correspondiente a cualesquiera de los nodos.
Cada nodo tiene un ancestro único $a(n)$, a excepción del nodo raíz. Cada nodo no-hoja es la raíz de un subárbol no trivial denotado por $T(n)$, mientras que $T = \{1, \dots, N\}$ representa el árbol completo y N es el número total de nodos en el árbol. Para un nodo, se define $P(n)$ como el conjunto de todos los nodos en la ruta desde la raíz de ℸ hacia el nodo n (incluidos el nodo y la raíz) y $P(n) = P(n)\backslash\{n\}$. Los parámetros del problema estocástico están dados por la secuencia $\{\alpha_n x_n + \beta_n I_n\}_{n\in ℸ}$. Con el objetivo de minimizar los costos totales esperados, la extensión estocástica del modelo multietápico, es la siguiente:

$$\boldsymbol{min\ Z} = \sum_{N\in ℸ} q_n(\alpha_n x_n + \beta_n I_n)$$

Sujeto a

$$I_{a(n)} + x_n = I_n + \delta_n \quad \forall n \in ℸ$$
$$x_n, I_n \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall n \in ℸ$$
$$I_0 = k$$

Si se introduce la identidad $I_n = \sum_{m\in\bar{P}(n)} x_m - d_n$, siendo $\sum_{m\in\bar{P}(n)} \delta_m$, la demanda acumulada el problema resultante quedará como:

$$\boldsymbol{min\ Z} = \sum_{N\in ℸ} q_n(\alpha_n + \frac{\sum_{m\in\bar{P}(n)} q_m\beta_m}{qn} x_n - \bar{c}$$

Sujeto a

$$\sum_{m\in\bar{P}(n)} x_m \ge d_n \qquad \forall n \in ℸ$$
$$x_n \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall n \in ℸ$$

Siendo $c_n = q_n(\alpha_n + \frac{\sum_{m\in\bar{P}(n)} q_m\beta_m}{qn})$ y $\bar{c} = \sum_{m\in\bar{P}(n)} q_n\beta_n d_n$

2.2.1 Algoritmo Primal

El esquema de indexación consiste en etiquetar los nodos de este modo: Los nodos en $\daleth$ son indexados $1,2,\ldots,N$ siguiendo un orden creciente en cada etapa de tiempo, es decir, $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_N$. No se impone ningún orden particular en los índices de los nodos en la misma etapa de tiempo, por lo que el nodo raíz tiene un índice igual a la unidad. Bajo tal esquema de indexación puede construirse una solución $x^0 = (\mathrm{x}_1^0, \mathrm{x}_2^0, \mathrm{x}_3^0 \ldots \mathrm{x}_\mathrm{N}^0)$

$$\sum_{m \in \bar{P}(n)} \mathrm{x}_\mathrm{n}^0 = \max_{m \in \bar{P}(n)} d_m \geq d_n$$

El algoritmo inicia en los nodos correspondientes a los niveles de producción dados por la solución x^0 y luego "traslada" una fracción de la producción de un grupo de nodos a su ancestro común, toda vez que la suma de los costos de producción unitarios de este grupo de nodos sea mayor que la del antepasado. Tal operación se denomina desplazamiento hacia arriba y los cambios se efectúan para hacer que al menos una variable -esto es, el nivel de producción por nodo- cambie de positivo a cero. La siguiente notación ha de utilizarse para efectos descriptivos:

$$\mathcal{A}(n) = \{m \in \daleth(n)/\{n\}: x_\mathrm{m} > 0, x_\mathrm{k} = 0 \;\; \forall k \in \; \bar{\mathcal{P}}(m)/\,\mathcal{P}(n)\}$$

$$\sum_{m \in A(n)} c_m$$

$$\Delta_\mathrm{n} = \max_{m \in A(n)} x_m$$

y

Hacer $\mathrm{x}_\mathrm{n}^* = \max\{0, \mathrm{d}_\mathrm{n}, \sum_{m \in \bar{P}(n)} \mathrm{x}_\mathrm{n}^*\}$

Hacer $k = \max\{n \in \daleth : \daleth(\mathrm{n})/\{n\} \neq \emptyset\}$

Mientras $k \geq 1$

Computar $A(k), s_\mathrm{k}$ y Δ_k

Si $c_\mathrm{k} < s_\mathrm{k}$ Entonces

Actualizar la solución correspondiente a los nodos en $A(k) \cup \{k\}$ como

$$\mathrm{x}_\mathrm{m}^* = \max\begin{Bmatrix} \mathrm{x}_\mathrm{k}^* + \Delta_\mathrm{k} \; si \; m = k \\ \mathrm{x}_\mathrm{m}^* + \Delta_\mathrm{k} \; \forall m \; \in A(k) \end{Bmatrix}$$

Además

Hacer $k = k - 1$

Finalizar si

Finalizar cuando

Retornar a x^*

2.3 Enfoque de optimización lineal entera mixta

El modelo propuesto posee la siguiente taxonomía: El primer conjunto de restricciones corresponde a aquellas relacionadas con el cubrimiento de la demanda. Las restricciones se plantean de la siguiente forma:
Para un periodo *j-ésimo* la cantidad de unidades a producir en ese intervalo de tiempo, adicionada al inventario restante del periodo anterior deberá ser mayor o igual a la demanda de ese mes. El segundo conjunto de restricciones corresponde a aquellas que están asociadas al balance del inventario, de manera

que, el inventario para el periodo *j-ésimo* estará dado por la diferencia entre la demanda del periodo actual y el inventario remanente del periodo inmediatamente anterior, adicionado a la cantidad de unidades a producir en tal periodo. Se hace la salvedad de que no hay existencias inmovilizadas en el primer periodo, por tanto, $I_1 = 0$. El tercer conjunto de restricciones vincula en su estructura funcional, decisiones de naturaleza dicotómica. Es decir, para un periodo *j-ésimo* se puede resolver emitir el pedido o no emitirlo. El coeficiente que acompaña a la variable binaria y_k equivale a la diferencia entre la demanda total en el horizonte de planeación y la demanda acumulada hasta el periodo anterior donde se emite el lanzamiento de un volumen determinado de artículos.
A continuación, se muestra la estructura formal del modelo de programación entera mixta aplicado al problema de inventario. El modelo propuesto se desarrolla en una hoja de cálculo en la que se declara la función objetivo junto con las restricciones asociadas al balance de inventario, cubrimiento de la demanda y la variable de lanzamiento de pedido que admite valores en un conjunto finito y discreto. El valor que asumirá tal variable equivaldrá a "1" si se realiza la emisión del pedido o "0" en caso contrario. En cada celda se asigna el coeficiente asociado a cada variable de decisión. Se especifican además las cotas inferiores y superiores de cada una de ellas.

$$\boldsymbol{min\ Z = m_j \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n} I_j}$$

Sujeto a:

$$x_1 \geq D_1$$
$$x_i + I_{i-1} \geq D_i$$

$$x_i - D_i = I_i$$
$$x_i + I_{n-1} - D_i = I_i$$

$$\sum_{j=1}^{n=6} x_{ij} \leq \left[\sum_{i=1}^{n=6} D_i\right] y_i$$

$$x_j, I_i, y_k \geq 0$$
$$y_k \in \{0,1\}$$

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En este apartado se aspira a realizar un análisis comparativo entre diversos modelos de programación de inventario. Esto con el objetivo de seleccionar aquel que minimice los costos asociados la gestión de stocks, sin que ello implique un deterioro del fill rate (nivel de servicio). En general, la complejidad de los modelos de inventario depende del comportamiento de la demanda. El patrón de la demanda en un modelo de inventario puede asumir cualquiera de estas categorías: Determinística y estacionaria, determinística y dinámica, probabilística y estacionaria o probabilística y dinámica. En situaciones prácticas, el patrón de la demanda en un modelo de inventario puede asumir alguna de las categorías mencionadas previamente.
Para evaluar el comportamiento de la demanda e identificar, al menos de forma aproximada, a qué categoría pertenece, se calcula el coeficiente de variación de cada periodo y se toman las siguientes determinaciones. Se debe considerar la demanda media en el periodo de análisis, como determinística y constante si el coeficiente de variación es inferior a 20%. Esto supone que la magnitud de la variabilidad de los datos es relativamente pequeña. Se debe asumir que la demanda media, en el periodo de análisis, es determinística y dinámica si existe una variación significativa entre los coeficientes de variación y a pesar de ello, este estadístico, permanece por debajo de los 20 puntos porcentuales. Otra consideración a tomar es que la demanda es probabilística y estacionaria si el coeficiente de variación es superior al 20% pero su valor permanece aproximadamente constante en los periodos. Finalmente, se debe considerar a la demanda como probabilística y dinámica si el coeficiente de variación es superior al 20% y tiene un comportamiento altamente inestable en los periodos. Esto implica que existe un cambio considerable en la dispersión relativa de los datos.
Una inspección somera de los resultados reportados en la Tabla 1 permite inferir que el grado de variabilidad asociado a la demanda agregada es relativamente estable y ésta puede categorizarse como

determinística estacionaria. Junto al coeficiente de variación se presentan dos parámetros estadísticos de tendencia central y de dispersión (a saber, media y desviación estándar).

Tabla 1. Caracterización de la demanda y pronósticos

PERIODO	DEMANDA MEDIA AGREGADA	DESVIACIÓN ESTÁNDAR	COEFICIENTE DE VARIACIÓN
1	16	1,3	8,10%
2	18	2,2	12,20%
3	15	2,8	18,70%
4	13	1,1	8,50%
5	11	0,6	5,50%
6	16	1,8	11,30%

A continuación, se presentan los diferentes enfoques utilizados para abordar el problema de programación de inventarios. Se elegirá aquel programa que satisfaga el criterio de optimalidad establecido sin transgredir las restricciones naturales y limitantes del sistema productivo. La política derivada de la aplicación del modelo de programación dinámica se reporta en la Tabla 2. Nótese que para casi la totalidad de periodos referenciales no se disponen de unidades en stock disponibles, destinadas para operaciones comerciales (a excepción del primero). Nótese que la solución hallada no admite la producción de artículos excedentes para satisfacer demandas futuras por lo que no ha de penalizarse el mantenimiento de unidades en inventario

Tabla 2. Resultados del modelo de Programación estocástica

PERIODOS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
DEMANDA	13	15	17	12	14	11

PERIODOS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
INVENTARIO INICIAL	0	0	0	0	0	0
TAMAÑO DEL PEDIDO (Incluido inventario inicial)	15	17	20	14	16	13
DEMANDA	13	15	17	12	14	11
INVENTARIO FINAL	2	2	3	2	2	2

COSTO TOTAL: $9.994.000

La Tabla 3 muestra la solución obtenida mediante la aplicación del modelo dinámico con todas las iteraciones correspondientes. Se observa que el periodo de inicialización corresponde al primero y se detiene el proceso una vez se ha llegado hasta el periodo x donde el CT se incrementa. Esto supone que el costo mínimo local se halla en el nodo $x - 1$. A partir de allí se plantea la decisión de ordenar n unidades que podrán suplir la demanda en este periodo inicial hasta el periodo j. Se sigue la misma lógica a partir del periodo subsiguiente hasta alcanzar la iteración final.

Es directamente perceptible a partir de los resultados arrojados que no se mantienen unidades en inventario que puedan suplir demandas futuras, y por tanto, se incurre en costos de preparación de pedidos para cada periodo. Cada volumen debe satisfacer únicamente la demanda para la etapa correspondiente.

Tabla 3. Resultados del modelo de programación dinámica

PERIODOS	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
DEMANDA	13	15	17	12	14	11

PARAMETROS	
Costo de Mantenimiento	$65.500
Costo de pedido	$ 22.000
Costo de compra	$110.000

Iteraciones	Demanda Acumulada	Costo Acumulado	Costo Total por periodo	Costo Total por unidad de tiempo	Decisión
1	15	0,00	22000,00	22000,00	Poseer 15 unidades en Periodo 1
	33	65000,00	1192000,00	596000,00	
	50	130000,00	3402000,00	1134000,00	
	63	195000,00	5937000,00	1484250,00	
	78	260000,00	9837000,00	1967400,00	
	90	325000,00	13737000,00	2289500,00	
2	18	0,00	22000,00	22000,00	Poseer 18 unidades en Periodo 2
	35	65000,00	1127000,00	563500,00	
	48	130000,00	2817000,00	939000,00	
	63	195000,00	5742000,00	1435500,00	
	75	260000,00	8862000,00	1772400,00	
3	17	0,00	22000,00	22000,00	Poseer 17 unidades en Periodo 3
	30	65000,00	867000,00	433500,00	
	45	130000,00	2817000,00	939000,00	
	57	195000,00	5157000,00	1289250,00	
4	13	0,00	22000,00	22000,00	Poseer 13 unidades en Periodo 4
	28	65000,00	997000,00	498500,00	
	40	130000,00	2557000,00	852333,33	
5	15	0,00	22000,00	22000,00	Poseer 15 unidades en Periodo 5
	27	65000,00	802000,00	401000,00	
6	12	0,00	0,00	22000,00	Poseer 12 unidades en Periodo 6
COSTO TOTAL	9,860,00				

Fuente: Propia

La solución obtenida ilustra que para la totalidad de periodos analizados se debe satisfacer estrictamente las demandas, sin manufacturar unidades adicionales que permanezcan inmovilizadas en inventario. La solución determinada en la Tabla 3 también arroja luz sobre cierta información que puede ser útil para ejecutar un análisis de sensibilidad.

A través del análisis de sensibilidad, es posible cuantificar el impacto resultante sobre la solución óptima luego de efectuar modificaciones sobre los parámetros del modelo. Subsiguientemente, se exponen de modo sintético, algunas consideraciones relevantes que se desprenden de este análisis: La columna solución contiene los valores óptimos, determinados para cada una de las variables de decisión. Nótese que al igual que las soluciones provistas por los modelos anteriores, no se admiten existencias en stock ni faltantes, es decir que debe satisfacerse a cabalidad la demanda. La contribución total no es nada más que la contribución en términos de costos de cada variable de decisión a la función objetivo. No hay costos asociados al mantenimiento de inventarios, tal y como se explicó previamente y sólo se considera el efectúo de un lanzamiento de pedido mensual. El costo reducido indica cuánto cambiaría el valor de la función objetivo si existe un decremento unitario del valor asociado a una variable de decisión cualquiera. En caso tal de que el costo reducido de una variable de decisión sea nulo se afirma que ésta ha alcanzado su valor óptimo, tal y como sucede con las variables x_i.

Para el primer conjunto de restricciones, la holgura representa las unidades que superan la demanda pronosticada. Para el segundo conjunto de restricciones, representará las unidades excedentes que estarán en stock para cada periodo, que en este caso es nulo. Para el tercer conjunto de restricciones, la holgura es equivalente a la diferencia entre las unidades acumuladas en stock para el horizonte de planeación y la cantidad de artículos que se inmovilizarán en un periodo cualquiera. Nótese que la holgura disminuye progresivamente, conforme avanzan los periodos, pues la cantidad de bienes terminados que deben estar disponibles para ventas se reduce. Los precios duales o precios sombra se interpretan como la mejora en el valor de la función objetivo por un incremento unitario en el lado derecho de una restricción. Esta condición únicamente es válida si el precio dual adquiere un valor positivo.

De esta forma se han expuesto, sintéticamente, los resultados arrojados en la Tabla 4. Si bien, es posible evaluar los resultados y posteriormente aplicar las modificaciones pertinentes sobre el modelo propuesto, una vez realizado el análisis de sensibilidad, para este caso específico, se optará por admitir la solución determinada, que es razonablemente buena.

Tabla 4. Resultados del modelo de programación entera mixta

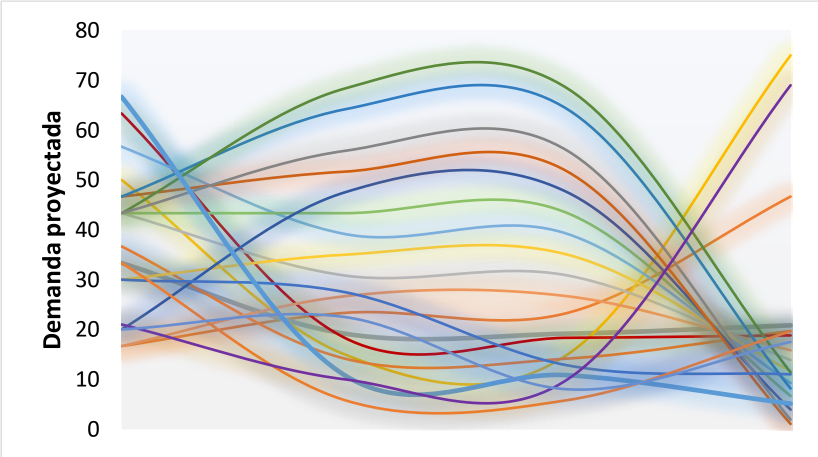
VARIABLE DE DECISIÓN	SOLUCION	CONTRIBUCION TOTAL	COSTO REDUCIDO	LADO IZQUIERDO	DIRECCION	LADO DERECHO	HOLGURA	PRECIO DUAL
x_1	13	$1.430.000	$0	**13**	=	**13**	0	110.000
x_2	15	$1.650.000	$0	**15**	=	**15**	0	110.000
x_3	17	$1.870.000	$0	**17**	=	**17**	0	110.000
x_4	12	$1.320.000	$0	**12**	=	**12**	0	110.000
x_5	14	$1.540.000	$0	**14**	=	**14**	0	110.000
x_6	11	$1.210.000	$0	**11**	=	**11**	0	112.000
I_1	0	$0	$65.000	**13**	≥	**13**	0	
I_2	0	$0	$65.000	**15**	≥	**15**	0	
I_3	0	$0	$65.000	**17**	≥	**17**	0	
I_4	0	$0	$65.000	**12**	≥	**12**	0	
I_5	0	$0	$63.000	**14**	≥	**14**	0	
I_6	0	$0	$177.000	**11**	≥	**11**	0	
y_1	1	$22.000	$22.000	-69	≤	0	69	
y_2	1	$22.000	$22.000	-54	≤	0	54	
y_3	1	$22.000	$22.000	-37	≤	0	37	
y_4	1	$22.000	$22.000	-25	≤	0	25	
y_5	1	$22.000	$22.000	-11	≤	0	11	
y_6	1	$22.000	0	0	≤	0	0	-2.000.000

4.1. Simulación de escenarios y evaluación de modelos

En esta fase se pretende simular 100 escenarios de la demanda para periodos futuros y aproximar una distribución de probabilidad continua que caracteriza los datos históricos a través de una distribución discreta. El método expeditivo para la generación de escenarios es el hipercubo latino. Este método considera las clases como estratos y los números pseudo aleatorios se distribuyen según una distribución proporcional a los elementos de cada muestra entre los estratos establecidos. Los resultados de los escenarios simulados se reportan en la Ilustración 1. Se han considerado escenarios optimistas, moderados y pesimistas, de allí que el margen de variabilidad sea significativamente alto.

En la Tabla 5 se reportan los resultados de la simulación de escenarios de demanda para los modelos reportados. La intención de este apartado es evaluar el rendimiento de los modelos construidos frente a variaciones en las ventas, no contempladas en los pronósticos iniciales. De este modo, es posible analizar cómo fluctúan los parámetros y costos relevantes en cada uno de los escenarios considerados. Nótese que el segundo modelo reporta el menor costo total de mantención de inventario. Asimismo, registra el costo incurrido en ventas perdidas es el más bajo respecto a los demás modelos competentes. Es directamente perceptible que este modelo proporciona un programa que no excede en demasía las expectativas de demanda y establece unos niveles de inventario que sirven como buffer o amortiguador para periodos en los que la demanda alcanza incrementos inusitados. Esto, en aguda contraposición, con el tercer modelo a partir del cual se deriva una política de mantenimiento de niveles exiguos de inventario, acarreando un costo significativo por motivo de no satisfacción de la demanda futura.

Ilustración 1. Simulaciones de escenarios de demanda



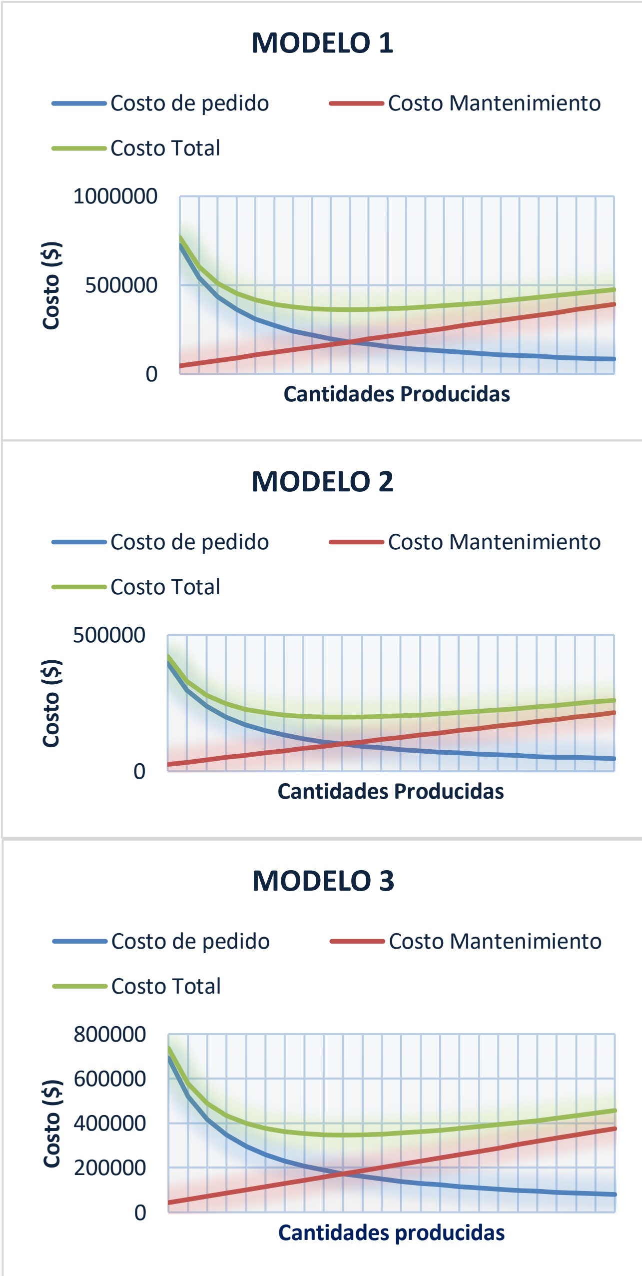
Un análisis similar se presenta en la Ilustración 2. En este gráfico combinado se presenta la evolución de los costos relevantes en la gestión de inventarios por cada nivel de producción simulado. En las tres representaciones gráficas se comparan los resultados para los modelos obtenidos que, prima facie, parecen exhibir comportamientos similares. Nótese que en el eje de las ordenadas se localizan los costos, mientras que en el eje de las abscisas se halla un conjunto de cantidades de producción simuladas. Los modelos 1 y 3 producen políticas con costos de mantenimiento de stock significativamente altos, para los diferentes escenarios. Además, la evolución de los costos de mantenimiento de inventario exhibe una tendencia creciente en todos los casos. De los modelos analizados el segundo proporciona los lineamientos para una política de inventario satisfactoria.

Tabla 5. Resultados de la simulación

MODELO 1		**MODELO 2**	
Cantidad de producción óptima	19,45	**Cantidad de producción óptima**	18,66
Inventario Máximo	5,56	**Inventario Máximo**	5,33
Inventario Promedio	2,781	**Inventario Promedio**	2,67
Costo de ventas perdidas	2524,1	**Costo de ventas perdidas**	11524,10
Costo de mantenimiento	180791,93	**Costo de mantenimiento**	173291,66
Costo total pedido	14651,48	**Costo total pedido**	1031,66
Costo unitario	24091	**Costo unitario**	22004,00
COSTO TOTAL T_C	222086,301	**COSTO TOTAL T_C**	207878,0824

MODELO 3	
Cantidad de producción óptima	12,61
Inventario Máximo	2,05
Inventario Promedio	0,52
Costo de ventas perdidas	223,03
Costo de mantenimiento	229152,66
Costos unitarios	33232,21
COSTO TOTAL T_C	287373,08

Ilustración 2. Gráfico combinado de evolución de costos relevantes



En la literatura especializada se proponen diversas aproximaciones al problema de gestión de inventarios. Así, por ejemplo, Álvarez y otros, (2020) proponen de modo similar a la presente investigación, un modelo de programación estocástica de dos etapas, donde las decisiones de enrutamiento se toman en la primera etapa, mientras que las cantidades de entrega, los niveles de inventario y las políticas se determinan en la segunda etapa. Al igual que en este paper se analizan diferentes escenarios y se contemplan situaciones como ventas perdidas, backlogging y reservas de capacidad. En particular, se estudian los mecanismos de respuesta de las soluciones óptimas para diferentes niveles de incertidumbre y configuraciones de costos. Además, la incertidumbre de la oferta y la demanda tiene diferentes efectos sobre el valor de tener en cuenta la incertidumbre.
Por otra parte, Aisha y Sani, (2020) formulan un modelo de inventario con horizonte de planificación fijo. Las probabilidades de transición en el horizonte de planificación de un estado de demanda a otro se

describen mediante un proceso de decisión de Markov, por lo que se supone que la demanda durante cada período depende de la demanda del período anterior. Para obtener un curso de acción óptimo, se debe tomar la decisión de ordenar unidades adicionales, denotada por ($z=1$), o no ordenar unidades adicionales ($z = 0$), en cada período del horizonte de planificación, donde z es una variable de decisión binaria.
Li, Zhang, and Zhang, (2020) analizan la eficiencia y efectividad de los escenarios fusionados en aguda contraposición a este estudio, donde se evalúan los escenarios individualmente y se analizan los resultados en función de perspectivas optimistas, pesimistas y moderadas. En el estudio en cuestión se resuelven modelos de programación estocástica de dos etapas y se obtiene un esquema de transporte. Subsiguientemente se calcula el costo de recurso de la segunda etapa en cada escenario antes de la fusión, y se calcula además el costo total esperado correspondiente al problema después de la fusión de los escenarios.
En virtud de lo expuesto anteriormente puede afirmarse que tanto las soluciones provistas en este paper y las que se obtienen en los estudios aquí mentados, proporcionan resultados óptimos, dentro de tiempos de ejecución razonables para problemas con una gran cantidad de escenarios.
En suma, puede argüirse que la gestión de sistemas de inventarios es una tarea que transversaliza la cadena de suministro y que tiene un impacto directo en lo relativo a la satisfacción del cliente. Dado que las inversiones para el mantenimiento de inventarios suelen ser cuantiosas, el establecer un adecuado equilibrio entre el capital invertido en los productos semiterminados, demás insumos y la fijación de niveles de servicio es una labor improrrogable para el administrador de inventarios.

5. CONCLUSIONES

Es consabido que la gestión de inventarios es una actividad inherente al ámbito de la administración de las existencias y permite, entre otros objetivos, la reducción ostensible de los niveles de stock sin generar detrimentos en la capacidad de respuesta frente a las eventuales fluctuaciones de la demanda de bienes y/o servicios ofertados. No obstante, la administración de stock tiene entre otros objetivos, aminorar la distorsión de la información transmitida desde eslabones más bajos de la cadena de suministros, así como también, el incremento del fill rate.
En este paper se efectuó un análisis comparativo entre diversos modelos de inventario para entidades en el sector manufacturero cartagenero. Tales modelos son diseñados a partir de la conjugación de variopintos modelos de programación matemática restringida. El desarrollo matemático de los modelos en mención se ha reportado detalladamente en tablas, evidenciándose que las soluciones provistas poseen algunas diferencias. Es preciso acotar, que las políticas de gestión de stock derivadas de la aplicación del modelo de programación dinámica, registran un mejor desempeño en términos económicos. Esto se refrenda al detectar que el costo total es inferior al de las demás políticas candidatas. En caso de adoptarse los lineamientos derivados de este modelo entonces debe conservarse una fracción considerablemente baja de existencias para evitar disrupciones en el sistema productivo. Cualquier plan de acción concebido a partir de los resultados obtenidos debe tener como objetivo esencial la ejecución de acciones direccionadas a establecer un balance óptimo de stock y uso de la capacidad instalada.
Desde el aspecto estrictamente técnico, es incontrovertible, que esta propuesta suministra información relevante que podrá ser útil a la posteridad, como guía para investigaciones semejantes en el área. Como posibles limitaciones de la investigación se anotan la cantidad relativamente reducida de datos recabados para la construcción de los modelos de inventario y el uso del procedimiento de agregación consistente en la homogenización de los bienes en una unidad lógica. La principal desventaja de tal procedimiento es que resume en términos agregados múltiples líneas de productos lo cual puede tornarse contraproducente para efectos analíticos.
Finalmente se exhorta a diseñar casos de aplicación en los cuales se evidencie la aplicación de técnicas metaheurísticas y modelos avanzados de simulación que incorporen múltiples variables para la resolución del problema de inventario. Complementariamente deben perfilarse estrategias administrativas sui generis que faciliten el rediseño de los modelos de gestión de stock con el objeto de amortiguar el efecto de las variaciones inherentes a la demanda. También se insta a evaluar la aplicación de modelos paramétricos y no paramétricos a fin de pronosticar los niveles de producción e inventario en periodos futuros.

REFERENCIAS

[1] AISHA, S., and SANI, B. (2020): Optimization ofEconomic Order Quantity (EOQ) With Dynamic Programming. **IOSR Journal of Mathematics,** *16*, 18-27.

[2] ALVAREZ, A., CORDEAU, J.-F., JANS, R., and MUNARI, P. (2020): Inventory routing under stochastic supply and demand. **Omega,** 1-37. doi:10.1016/j.omega.2020.102304

[3] AREF, G., and ABOLFAZL, M. (2018): An inventory model with controllable lead time and ordering cost, log-normal-distributed demand, and gamma-distributed available capacity. **Cogent Business and Management,** *5*(1): doi:10.1080/23311975.2018.1469182

[4] GARZÓN SAÉNZ, H., SOLANA GARZÓN, J., and RAHMER, B. (2017): Análisis comparativo de modelos de planeación agregada de las ventas y operaciones: Estudio de caso para la empresa Cartagenera de Icopores S.A. **Avances en Investigación de Operaciones y Ciencias Administrativas,** 45-151. Barranquilla.

[5] HARDY, C., BHAKOO, V., and STEVE, M. (2020): A New Methodology for Supply Chain Management: Discourse Analysis and its Potential for Theoretical Advancement. **Journal Chain Management,** *56*, 19-35.

[6] HONG MIN, S., ZACHARIA, Z. G., and SMITH, C. D. (2019): Defining Supply Chain Management: In the Past, Present, and Future. **Journal of Business Logistics,** *41*, 44-55.

[7] KHEIRI, A. (2020): Heuristic Sequence Selection for Inventory Routing Problem. **Transportation Science,** *54*(2): doi:10.1287/trsc.2019.0934

[8] LI, Z., ZHANG, Y., and ZHANG, G. (2020): Two-Stage Stochastic Programming for the Refined Oil Secondary Distribution With Uncertain Demand and Limited Inventory Capacity. **IEEE Access,** *8*, 119487-119500. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3004849

[9] NAMBIRAJAN, R., MENDOZA, A., and PAZHANI, S. (2020): CAR: heuristics for the inventory routing problem. **Wireless Netw**, *26*, 5783–5808.

[10] PENG, HUI, SHEN, N., LIAO, H., and XUE, H. (2020): Uncertainty factors, methods, and solutions of closed-loop supply chain — A review for current situation and future prospects. **Journal of Cleaner Production**, *254*. doi:https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.120032

[11] SÁNCHEZ PINEDA, D. E., and RAMÍREZ TORRES, N. (2018): Inventory management model design in a strawberry crop, based on the model order for a single period and six sigma metrics. **Ingeniería y Competitividad**, *20*(1): doi:10.25100/iyc.v20i1.6097

[12] SHEAKH, T. (2018): A Study of Inventory Management System Case Study. **Journal of Dynamical and Control Systems**, *10*, 1176-1190.