

TÉCNICA DE INTEGRACIÓN SIMBÓLICA EN ELASTICIDAD CON ELEMENTO DE CONTORNO. CASO PUNTO DE COLOCACIÓN NO PERTENECIENTE AL ELEMENTO.

Juan C. Osorio^{1*,**}, Iris J. Lozada^{**}, Wilfredo Angulo^{***}, Albert Espinal^{****}

* Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Facultad de Ciencias Naturales y Exactas, Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas, Sede Quito, Ecuador, Avenida 12 de octubre 1076 y Roca, Apartado Postal 17-01-2184,

** Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado, Decanato de Ingeniería Civil. Barquisimeto. Venezuela.

***Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.

****Escuela Superior Politécnica del Litoral, ESPOL, Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación, Campus Gustavo Galindo Km. 30.5 Vía Perimetral, P.O. Box 09-01-5863, Guayaquil, Ecuador.

ABSTRACT

This paper is about a methodology to calculate all the components of the influence matrices of the curved boundary elements of three nodes in plane elasticity problems, using a semi-analytical formulae and coordinate transformations, with which it is possible to savings of CPU time of the numerical integration used in these cases (Gauss-Legendre), maintaining its accuracy. To make the comparison of CPU times and precision of the results obtained by both techniques, numerical and semi-analytical subroutines were created using MAPLE symbolic-manipulation software. Among the results achieved is the reduction of computation times by 76%, 61% and 35% compared to the Gaussian numerical integration with four, six and eight integration points, respectively. That this technique successfully was used by the authors in the integration of matrices in the Finite Element Method (FEM).

KEYWORDS: Boundary Element Method (BEM), plane elasticity.

MSC: 65N38

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología para calcular todas las componentes de las matrices de influencia de los elementos de contornos curvos de tres nodos en problemas de elasticidad plana, utilizando una fórmula semi-analítica y transformaciones de coordenadas, con la que se hace posible reducir los tiempos de cómputos de la integración numérica utilizada en estos casos (Gauss- Legendre), manteniendo su precisión. Para hacer la comparación de los tiempos de CPU y precisión de los resultados obtenidos por ambas técnicas, se crearon subrutinas numéricas y semi- analíticas usando MAPLE®. Entre los resultados alcanzados se destaca la reducción de tiempos de cómputos de 76%, 61% y 35% en comparación a la integración numérica Gaussiana con cuatro, seis y ocho puntos de integración, respectivamente. Cabe destacar que esta técnica fue utilizada exitosamente por los autores en la integración de matrices en el método de los elementos finitos.

1. INTRODUCCIÓN

¹ jcosorio@puce.edu.ec

En numerosas ocasiones de la vida diaria, los especialistas se enfrentan con la dificultad de calcular desplazamientos, tensiones y deformaciones de sólidos sometidos a la acción de fuerzas externas, donde es muy difícil o imposible obtener soluciones analíticas para este problema. Los métodos numéricos de diferencias finitas (FDM), elementos finitos (FEM) y contorno (BEM) constituye hoy en día, el procedimiento habitual para aproximar estas soluciones. En el FEM y FDM se discretiza tanto el dominio como su contorno, sin embargo, en BEM sólo se discretiza el contorno del dominio, disminuyendo la dimensión del problema. Así, al abordar un problema tridimensional por FEM, se tendría que trabajar con integrales triples sobre los elementos mientras con el BEM las integrales a aproximar serían integrales dobles sobre la frontera del sólido. Por lo expuesto, se estudiará el problema de elasticidad 2D con BEM. Se conoce que las primeras formulaciones integrales para análisis tensional de medios continuos datan del comienzo del siglo XX, pero no fue sino hasta que Rizzo[14] desarrolló la primera versión directa del método aplicada a problemas bidimensionales y basada en la solución de Kelvin. Posteriormente [5] implementó el método directo para el análisis de dominios 3D en elastostática, utilizando interpolación constante de las variables sobre la frontera. Autores como Lachat y Watson[8] aplicaron el método considerando interpolación lineal y parabólica respectivamente sobre la frontera lo cual proporciona una mejora en la precisión de los resultados obtenidos. Por otra parte, Nakagua[10] en su tesis doctoral aplicó con éxito las funciones de Mindlin para el análisis de dominios tridimensionales semi-infinitos en elastostática. Así mismo, en 1981 el trabajo [15] originaron las expresiones analíticas de la solución fundamental para dominios bidimensionales elásticos semi-infinitos. Cerrolaza y Alarcón [2] trabajaron procedimientos numéricos orientados a la evaluación de integrales singulares VPC basado en una transformación bi-cúbica de coordenadas, obteniéndose expresiones sencillas y atractivas para las cuadraturas numéricas e incorporables a los códigos MEC ya existentes. Posteriormente Alarcón et. al [1] generan métodos basados en transformaciones de coordenadas no-lineales, para la evaluación de las integrales singulares y cuasi singulares que aparecen en el método directo de los elementos de contorno. Se detecta un error inherente a algunas de las transformaciones propuestas y finalmente se sugieren dos nuevas transformaciones que mejoran las actualmente disponibles.

En 1995 Domínguez et. al [6] dedujeron una técnica para la evaluación de las integrales singulares que aparecen en el Método de los Elementos de Contorno en elasticidad tridimensional, basada en la utilización de transformaciones de coordenadas no lineales. Autores como Paris y Cañas [13] presentaron en su libro expresiones analíticas para la integración constante de elementos de contorno parabólico en elasticidad cuando el punto de colocación no pertenece al elemento. Por otro lado, en [4] realizaron técnicas para la evaluación directa de las integrales en el sentido del valor principal de Cauchy en el MEC. El procedimiento propuesto permitió regularizar en coordenadas cartesianas los términos fuertemente singulares de los núcleos de integración que son expresados como suma de integrales no singulares evaluables numéricamente con cuadraturas estándar. Por otra parte, Padhi et al [12] encontraron técnicas de manipulación simbólica para la integración de núcleos singulares producto de funciones de forma en problemas de elastostática en 2D. Así mismo, en [16] se efectuaron un método para computar las matrices que resultan en la formulación del MEC 3D en elasticidad anisotrópica. Dichos autores, lograron expresar las integrales involucrada en el método en integrales regulares de línea y posteriormente se efectuaron numéricamente. En el trabajo mostrado en [17] se presentaron integraciones exactas de algunas integrales singulares que se presentan en elasticidad bidimensional.

Actualmente en el MEC no existen metodologías simbólicas que optimicen tiempos de CPU en integraciones regulares. Sin embargo, en MEF se han desarrollado una gran cantidad de investigaciones en la integración de matrices regulares con esta técnica, obteniéndose mejoras en los tiempos de cálculo, en comparación a las integraciones numéricas. Entre ellos, Griffiths[7] presentó en 1994, una fórmula general que crea una técnica para el cálculo de la matriz de rigidez de un elemento finito cuadrilátero isoparamétrico de cuatro nodos, utilizando transformaciones de coordenadas. Este autor logro un ahorro significativo de tiempos de CPU en comparación a la Gaussiana de orden dos. Posteriormente Lozada et al [9] extendieron dichos resultados a los elementos cuadriláteros de 8 nodos plano y en los trabajos de Cerrolaza & Osorio en [11] y [3] a elementos en el espacio.

Por lo expuesto en este trabajo se explora la aplicabilidad de esta técnica a la integración de las matrices de influencia de un elemento de contorno curvo de tres nodos, donde la dificultad que se presenta en su aplicación a la hora de calcular desplazamientos, tensiones y deformaciones, es el cálculo de los coeficientes del sistema de ecuaciones resultante de la discretización del problema. Estos coeficientes vienen dados por algunas de las siguientes integrales:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(r(P, \zeta))^n} \right) f_1(\zeta) \sqrt{f_2(\zeta)} d\zeta \quad (1.1)$$

$$I_2 = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{(r(P, \zeta))^n} \right) f_i(\zeta) d\zeta \quad (1.2)$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 \text{Ln} \left(\frac{1}{(r(P, \zeta))^n} \right) f_i(\zeta) d\zeta \quad (1.3)$$

Donde $n \in \mathbb{N}$, $r(P, \zeta)$ representa la distancia del punto de colocación P al punto de integración ζ y $f_i(\zeta)$ son funciones polinómicas con $i \in \{1, 2\}$. De las ecuaciones (1.1), (1.2) y (1.3) se observa que la complejidad del problema depende de la ubicación del punto P . Si el punto P no pertenece al elemento sobre el cual se integra, entonces las integrales dadas en las ecuaciones anteriores no presentan singularidades. Este tipo de integrales usualmente se realiza con integración numérica (Gauss-Legendre). El problema que se presenta en este caso es el costo computacional, pues se requiere de una gran cantidad de puntos de integración para obtener una precisión razonable. Ahora, si P pertenece al elemento entonces las integrales presentan singularidades las cuales pueden ser evaluadas dependiendo el tipo de singularidad. En general las integrales con singularidades débiles son evaluadas con cuadratura Gaussiana y las de singularidades fuertes son integrables solo en el sentido de valor principal de Cauchy. Por lo expuesto, en este trabajo se presenta una metodología semi-analítica para el cálculo de las integrales de elementos de contornos curvos de tres nodos en problemas de elasticidad plana. La misma hace posible reducir los tiempos de cómputos de la integración numérica utilizada en estos casos (Gauss-Legendre), manteniendo su precisión.

2. FORMULACIÓN

Consideremos un dominio plano, finito, elástico, homogéneo e isótropo Ω limitado por una frontera Γ . Para el análisis del problema mediante el MEC, se necesita establecer una formulación integral que relacione los desplazamientos u y tensiones t en la frontera del dominio en estudio. En este caso, dicha relación es dada por la ecuación de Somigliana la cual si se desprecia el efecto de las fuerzas de volumen es dada por:

$$c_{ij}(P) u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} U_{ij}^*(P, Q) t_j(Q) d\Gamma = 0 \quad (2.1)$$

Donde las funciones T_{ij}^* y U_{ij}^* son las N_e elementos curvos de tres nodos $\left(\Gamma = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Gamma_e \right)$. En la figura 1, se

muestra los desplazamientos $\mathbf{u}_i^e = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$ y numeración de los i nodos del elemento genérico Γ_e , con $i \in \{1, 2, 3\}$

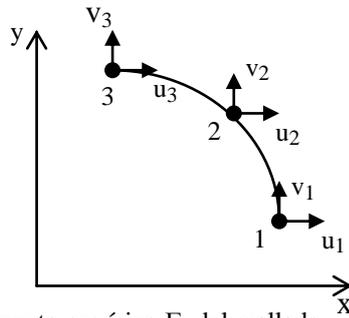


Figura 1. Elemento genérico Γ_e del mallado.

Denotaremos por:

$$L^e = \int_{\Gamma_e} T_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) d\Gamma \quad \text{y} \quad M^e = \int_{\Gamma_e} U_{ij}^*(P, Q) t_j(Q) d\Gamma \quad (2.2)$$

Así, la ecuación (2.1) puede escribirse como:

$$c_{ij}(\mathbf{P})u_j(\mathbf{P}) + \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{L}^e - \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{M}^e = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Estas matrices son llamadas matrices de influencia del sistema. Para interpolar los desplazamientos $\mathbf{u} = [u \ v]^T$, tensiones $\mathbf{t} = [t_x \ t_y]^T$ y geometría del elemento de contorno Γ_e , se utilizó as siguientes funciones de interpolación:

$$N_1 = \frac{1}{2}\zeta(\zeta+1) \ , \ N_2 = (1-\zeta^2) \ \text{y} \ \ N_3 = \frac{1}{2}\zeta(\zeta-1) \quad (2.4)$$

Las cuales en forma matricial pueden ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Por lo cual, dichas interpolaciones están dadas por:

$$x = \sum N_i(\zeta) x_i \ ; \quad y = \sum N_i(\zeta) y_i \quad (\text{Geometría}) \quad (2.6)$$

$$u = \sum N_i(\zeta) u_i \ ; \quad v = \sum N_i(\zeta) v_i \quad (\text{Desplazamientos}) \quad (2.7)$$

$$t_x = \sum N_i(\zeta) t_{xi} \ ; \quad t_y = \sum N_i(\zeta) t_{yi} \quad (\text{Tensiones}) \quad (2.8)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_{x1} & t_{x2} & t_{x3} \\ t_{y1} & t_{y2} & t_{y3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta^2 \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

La transformación de coordenadas dada en (2.9) (ver figura 2) nos permite calcular las integrales dadas en (2.2) como integrales definidas en el intervalo $[-1,1]$.

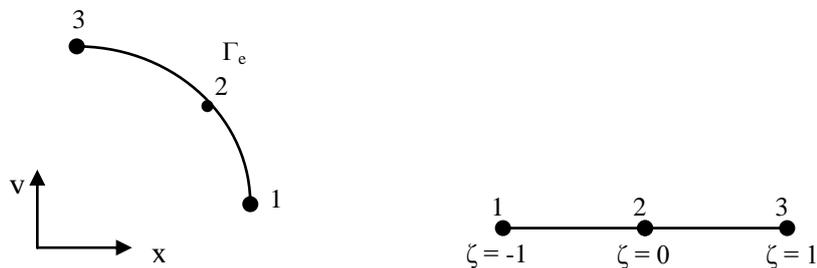


Figura 2. Elemento de contorno Γ_e en el sistema global XY, y en el local ζ .

De (2.9) se tiene que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\zeta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Por lo tanto $\frac{\partial x}{\partial \zeta}$ y $\frac{\partial y}{\partial \zeta}$ están dadas por

$$\frac{\partial s}{\partial \zeta} = A_s \zeta + B_s \quad \text{donde} \quad \begin{cases} A_s = s_1 - 2s_2 + s_3 \\ B_s = \frac{1}{2}(s_3 - s_1) \end{cases} \quad \text{con } s = x \text{ ó } y \quad (2.13)$$

Por lo que

$$d\Gamma_e = \left(\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2} \right) d\zeta = |J| d\zeta \quad (2.14)$$

En el cual J es el Jacobiano de la transformación de coordenadas.

De (2.14) se tiene:

$$|J| = \sqrt{C_1 \zeta^2 + C_2 \zeta + C_3} \quad (2.15)$$

Con

$$C_1 = A_x^2 + A_y^2, \quad C_2 = 2(A_x B_x + A_y B_y) \quad \text{y} \quad C_3 = B_x^2 + B_y^2 \quad (2.16)$$

Así:

$$L^e = \int_{-1}^1 T_{ij}^*(P, \zeta) u_j(\zeta) |J| d\zeta \quad \text{y} \quad M^e = \int_{-1}^1 U_{ij}^*(P, \zeta) t_j(\zeta) |J| d\zeta \quad (2.17)$$

Ya que

$$T_{ij}^* = \begin{bmatrix} t_{11}^* & t_{12}^* \\ t_{21}^* & t_{22}^* \end{bmatrix} \quad ; \quad U_{ij}^* = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Se tiene que

$$u_j(\zeta) = \begin{pmatrix} u(\zeta) \\ v(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3 \\ v_1 N_1 + v_2 N_2 + v_3 N_3 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$= \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3)^T \quad (2.20)$$

$$t_j(\zeta) = \begin{pmatrix} t_x(\zeta) \\ t_y(\zeta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{x1} N_1 + t_{x2} N_2 + t_{x3} N_3 \\ t_{y1} N_1 + t_{y2} N_2 + t_{y3} N_3 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$= \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} (t_{x1} \quad t_{y1} \quad t_{x2} \quad t_{y2} \quad t_{x3} \quad t_{y3})^T \quad (2.22)$$

Por lo tanto,

$$L^e = H_{ij} (u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3)^T \quad (2.23)$$

$$M^e = G_{ij} (t_{x1} \quad t_{y1} \quad t_{x2} \quad t_{y2} \quad t_{x3} \quad t_{y3})^T \quad (2.24)$$

Donde,

$$H_{ij} = \int_{-1}^1 T_{ij}^*(P, \zeta) N_i(\zeta) |J| d\zeta \quad (2.25)$$

$$G_{ij} = \int_{-1}^1 U_{ij}^*(P, \zeta) N_i(\zeta) |J| d\zeta \quad (2.26)$$

Consideremos las matrices H y G particionadas en tres submatrices de orden 2x2:

$$H^i = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \int T_{11}^* N_i |J| d\zeta & \int T_{12}^* N_i |J| d\zeta \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ \int T_{21}^* N_i |J| d\zeta & \int T_{22}^* N_i |J| d\zeta \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

$$G^i = \begin{bmatrix} \int U_{11}^* N_i |J| d\zeta & \int U_{12}^* N_i |J| d\zeta \\ -1 & -1 \\ \int U_{21}^* N_i |J| d\zeta & \int U_{22}^* N_i |J| d\zeta \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

En elasticidad plana, las funciones T_{ij}^* y U_{ij}^* que se utilizan para deformación y tensión, están dadas por:

$$U_{11}^*(P, Q) = K_1 \left(K_2 \text{Ln} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \quad (2.29)$$

$$U_{12}^*(P, Q) = K_1 \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \quad (2.30)$$

$$U_{21}^*(P, Q) = K_1 \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial x} \right) \quad (2.31)$$

$$U_{22}^*(P, Q) = K_1 \left(K_2 \text{Ln} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right) \quad (2.32)$$

$$T_{11}^*(P, Q) = \frac{1}{r} K_3 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ K_4 + 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial x} \right\} \right) \quad (2.33)$$

$$T_{12}^*(P, Q) = \frac{1}{r} K_3 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right\} - K_4 \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} n_y - \frac{\partial r}{\partial y} n_x \right\} \right) \quad (2.34)$$

$$T_{21}^*(P, Q) = \frac{1}{r} K_3 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial y} \right\} - K_4 \left\{ \frac{\partial r}{\partial x} n_y - \frac{\partial r}{\partial y} n_x \right\} \right) \quad (2.35)$$

$$T_{22}^*(P, Q) = \frac{1}{r} K_3 \left(\frac{\partial r}{\partial n} \left\{ K_4 + 2 \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial r}{\partial y} \right\} \right) \quad (2.36)$$

En estas ecuaciones r representa la distancia del punto de aplicación P al punto de integración Q y n es el vector normal exterior al contorno en P . Además, los valores K_1 , K_2 , K_3 y K_4 están dados en base a las constantes elásticas del material γ y G y según el problema que se estudie

Deformación plana:

$$K_1 = \frac{1}{8\pi G(1-\gamma)}, \quad K_2 = (3-4\gamma), \quad K_3 = \frac{1}{4\pi(1-\gamma)}, \quad K_4 = (1-2\gamma) \quad (2.37)$$

O tensión plana:

$$K_1 = \frac{1}{8\pi G \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \right)}, \quad K_2 = \left(3 - 4 \frac{\gamma}{1+\gamma} \right), \quad K_3 = \frac{1}{4\pi \left(1 - \frac{\gamma}{1+\gamma} \right)}, \quad K_4 = \left(1 - 2 \frac{\gamma}{1+\gamma} \right) \quad (2.38)$$

Dado el punto P , se tiene:

$$r = d(P, Q) = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}, \quad \forall Q(x, y) \in \Gamma_e \quad (2.39)$$

Con lo cual

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-2(x_p - x)}{2\sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2}} = \frac{(x - x_p)}{r} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{(y - y_p)}{r} \quad (2.41)$$

Por otra parte:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^3 N_i(\zeta) x_i, \sum_{i=1}^3 N_i(\zeta) y_i \right) = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x}, d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y}) \quad (2.42)$$

$$\text{Con } d_{1s} = \frac{1}{2}s_1 - s_2 + \frac{1}{2}s_3; \quad d_{2s} = -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3; \quad d_{3s} = s_2 \quad \text{para } s = x, y$$

Así;

$$r^2 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)^2 + (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)^2 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{(d_{1s}\zeta^2 + d_{2s}\zeta + d_{3s} - s_p)}{r} \text{ para } s = x, y \quad (2.44)$$

Además,

$$n_x = \frac{1}{|J|} \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \frac{(A_y\zeta + B_y)}{|J|}, \quad n_y = -\frac{1}{|J|} \frac{\partial x}{\partial \zeta} = -\frac{(A_x\zeta + B_x)}{|J|} \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} n_x + \frac{\partial r}{\partial y} n_y = \frac{M_1}{r|J|} \quad (2.46)$$

Donde,

$$M_1 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)(A_x\zeta + B_x) - (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)(A_y\zeta + B_y) \quad (2.47)$$

En consecuencia, las expresiones analíticas de las componentes de las matrices Hi y Gi están dadas:

$$H_{11}^i = K_1 K_2 \left(\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) N_i |J| d\zeta \right) + K_1 \left(\int_{-1}^1 \frac{(d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)^2}{r^2} N_i |J| d\zeta \right) \quad (2.48)$$

$$H_{12}^i = K_1 \left(\int_{-1}^1 (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p) (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p) \frac{1}{r^2} N_i |J| d\zeta \right) \quad (2.49)$$

$$H_{21}^i = K_1 \left(\int_{-1}^1 (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p) (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p) \frac{1}{r^2} N_i |J| d\zeta \right) \quad (2.50)$$

$$H_{22}^i = K_1 K_2 \left(\int_{-1}^1 \ln\left(\frac{1}{r}\right) N_i |J| d\zeta \right) + K_1 \left(\int_{-1}^1 \frac{(d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)^2}{r^2} N_i |J| d\zeta \right) \quad (2.51)$$

$$G_{11}^i = \int_{-1}^1 \left(r^2 K_4 + 2(d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)^2 \right) \frac{K_3 M_1 N_i}{r^4} d\zeta \quad (2.52)$$

$$G_{22}^i = \int_{-1}^1 \left(r^2 K_4 + 2(d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)^2 \right) \frac{K_3 M_1 N_i}{r^4} d\zeta \quad (2.53)$$

$$M_2 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)(A_x\zeta + B_x) + (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)(A_y\zeta + B_y) \quad (2.54)$$

$$M_3 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)(d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p) \quad (2.55)$$

$$G_{12}^i = \int_{-1}^1 \left(\frac{2M_1 M_3}{r^2} + K_4 M_2 \right) \frac{K_3 N_i}{r^2} d\zeta \quad (2.56)$$

$$G_{21}^i = \int_{-1}^1 \left(\frac{2M_1 M_3}{r^2} - K_4 M_2 \right) \frac{K_3 N_i}{r^2} d\zeta \quad (2.57)$$

3. INTEGRACIÓN SIMBÓLICA DE LAS MATRICES DE INFLUENCIA.

Considerando $A_s = s_1 - 2s_2 + s_3$ con $s \in \{x, y\}$ y manipulando los resultados obtenidos al integrar las matrices H y G con integración gaussiana y Ne puntos de integración, se logra una expresión cerrada que representa los términos de estas matrices y esta dada por:

$$Q_{ij} = \sum_{i=1}^{(N^e/2)} w_i \left(\frac{D_{i1Q}}{(A_{i1} + B_{i1})^M} F_{i1Q} L_{i1} + \frac{D_{i2Q}}{(A_{i1} - B_{i1})^M} F_{i2Q} L_{i2} \right) \text{ para } Q = H \text{ ó } G \quad (3.1)$$

Donde:

$$A_s = s_1 - 2s_2 + s_3 \quad B_s = \frac{1}{2}(s_3 - s_1) \quad (3.2)$$

$$d_{1s} = \frac{1}{2}s_1 - s_2 + \frac{1}{2}s_3, \quad d_{2s} = -\frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{2}s_3, \quad d_{3s} = s_2, \quad \text{con } s=x \text{ o } y \quad (3.3)$$

$$C_1 = A_x^2 + A_y^2, \quad C_2 = 2(A_x B_x + A_y B_y), \quad C_3 = B_x^2 + B_y^2 \quad (3.4)$$

$$M_1 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)(A_x\zeta + B_x) - (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)(A_y\zeta + B_y) \quad (3.5)$$

$$M_2 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p)(A_x\zeta + B_x) + (d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p)(A_y\zeta + B_y) \quad (3.6)$$

$$M_3 = (d_{1x}\zeta^2 + d_{2x}\zeta + d_{3x} - x_p) \left(d_{1y}\zeta^2 + d_{2y}\zeta + d_{3y} - y_p \right) \quad (3.7)$$

$$A_{i1} = 0.25q_1 p_i^4 + 0.25(q_3 + 4q_4) p_i^2 + q_6, \quad B_{i1} = 0.5q_2 p_i^3 + q_5 p_i \quad (3.8)$$

$$q_1 = A_x^2 + A_y^2, \quad q_2 = x_{13} A_x + y_{13} A_y, \quad q_3 = x_{13}^2 + y_{13}^2, \quad (3.9)$$

$$q_4 = A_x x_{2p} + A_y y_{2p}, \quad q_5 = x_{13} x_{2p} + y_{13} y_{2p}, \quad q_6 = x_{2p}^2 + y_{2p}^2$$

$$M = \begin{cases} 1 & \text{si } Q = G \\ 2 & \text{si } Q = H \end{cases} \quad (3.10)$$

$$D_{i1Q} = \begin{cases} 1 & \text{Si } Q = H \\ \sqrt{(q_1 p_i^2 + 0.25q_3) + q_2 p_i} & \text{Si } Q = G \end{cases} \quad (3.11)$$

$$D_{i2Q} = \begin{cases} 1 & \text{Si } Q = H \\ \sqrt{(q_1 p_i^2 + 0.25q_3) - q_2 p_i} & \text{Si } Q = G \end{cases} \quad (3.12)$$

Con F_{i1Q} y F_{i2Q} son funciones que dependen de las coordenadas nodales. Además, p_i y w_i son los puntos y pesos de integración Gaussiana de orden $N^e \times N^e$. Consideremos

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \end{bmatrix} \quad \text{con } Q = H, G \quad (3.13)$$

$$M_{i1}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{D_{i1Q}}{(A_{i1} + B_{i1})^M} F_{i1Q} \quad (3.14)$$

$$M_{i2}(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \frac{D_{i2Q}}{(A_{i1} - B_{i1})^M} F_{i2Q} \quad (3.15)$$

Para calcular Q_{11} , Q_{13} y Q_{15} se evalúa la ecuación (3.1) en las coordenadas nodales, digamos $P_1 = (a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ con $F_{i1Q} = F_{i1QA}$ y $F_{i2Q} = F_{i2QA}$. En este casos, se puede apreciar que las expresiones $M_{i1}(P_1)$ y $M_{i2}(P_1)$ son iguales en el cálculo de los tres términos, solo varían las constantes

L_{i1} y L_{i2} . Estos valores son dados en las tablas 1, 2 y 3 según sea el caso y permiten obtener G_{11} , G_{13} , G_{15} , H_{11} , H_{13} y H_{15} de las matrices H y G simultáneamente.

Caso 1 $N_e=4$. Acá $p_1=0.3399810435$, $p_2=0.8611363159$, $w_1=0.6521451548$, $w_2=0.3478548451$

Tabla 1. Valores de las constantes L_{1i} y L_{2i} para $N_e = 4$ en la generación de los términos

Términos	L_{11}	L_{12}	L_{21}	L_{22}
$G_{11}, G_{12}, G_{21}, G_{22}$ $H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}$	0.227784076	-0.112196968	0.801346035	-0.597902806
$G_{13}, G_{14}, G_{23}, G_{24}$ $H_{13}, H_{14}, H_{23}, H_{24}$	0.884412890	0.884412890	0.258444245	0.258444245
$G_{15}, G_{16}, G_{25}, G_{26}$ $H_{15}, H_{16}, H_{25}, H_{26}$	-0.112196966	0.227784076	-0.059790280	0.801346035

Caso 2: $N_e = 6$

$p_1 = 0.2386191860$; $p_2 = 0.6612093864$; $p_3 = 0.9324695142$

$w_1 = 0.4679139345$; $w_2 = 0.3607615730$; $w_3 = 0.1713244923$

Tabla 2. Valores de las constantes L_{1i} y L_{2i} para $N_e = 6$ en la generación de los términos

Términos	L_{11}	L_{12}	L_{21}	L_{22}	L_{31}	L_{32}
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

G ₁₁ , G ₁₂ , G ₂₁ , G ₂₂ H ₁₁ , H ₁₂ , H ₂₁ , H ₂₂	0.14777915	-0.0908400350	0.549203619	-0.112005766	0.900984454	-0.031485059
G ₁₃ , G ₁₄ , G ₂₃ , G ₂₄ H ₁₃ , H ₁₄ , H ₂₃ , H ₂₄	0.943060884	0.943060884	0.5628021473	0.5628021473	0.1305006051	0.1305006051
G ₁₅ , G ₁₆ , G ₂₅ , G ₂₆ H ₁₅ , H ₁₆ , H ₂₅ , H ₂₆	-0.0908400350	0.147779151	-0.112005766	0.549236195	-0.0314850596	0.9009844545

Caso 3 Ne = 8

p₁ = 0.960289856; p₂ = 0.796666477; p₃ = 0.525532409; p₄ = 0.183434642

w₁=0.101228536; w₂=0.222381034; w₃=0.313706645; w₄=0.3626837833

Tabla 3. Valores de las constantes L_{1i} y L_{2i} para N_e = 8 en la generación de los términos.

Término	L ₁₁	L ₁₂	L ₂₁	L ₂₂	L ₃₁	L ₃₂	L ₄₁	L ₄₂
G ₁₁ , G ₁₂ , G ₂₁ , G ₂₂ H ₁₁ , H ₁₂ , H ₂₁ , H ₂₂	0.9412232	-0.0190666	0.71567197	-0.8099450	0.40085836	-0.12467404	0.10854145	-0.0748931
G ₁₃ , G ₁₄ , G ₂₃ , G ₂₄ H ₁₃ , H ₁₄ , H ₂₃ , H ₂₄	0.07784339	0.07784339	0.36532252	0.36532252	0.72381568	0.72381568	0.96635173	0.96635173
G ₁₅ , G ₁₆ , G ₂₅ , G ₂₆ H ₁₅ , H ₁₆ , H ₂₅ , H ₂₆	-0.0190666	0.94122323	-0.0809945	0.71567197	-0.1246740	0.40085836	-0.0748931	0.10854145

4. VALIDACIÓN DE LOS RESULTADOS

4.1 Precisión

Para analizar la precisión de los resultados obtenidos con la metodología semi-analítica en comparación a la numérica (gauss con 4, 6 y 8 puntos de integración) se consideraron ejemplos numéricos con diferentes ubicaciones del punto fuente. Los errores cometidos fueron calculados con la fórmula:

$$\text{Error} = \frac{\sqrt{\sum_{i,j} (s_{ij}^* - s_{ij}^{\text{EX}})^2}}{\sum_{i,j} |s_{ij}^*|} \tag{4.1}$$

Dónde: s_{ij}^{*} : Términos de la matriz obtenida por integración numérica con N puntos de integración.

s_{ij}^{EX} : Términos de la matriz obtenida por integración simbólica.

En la Tabla 4 se muestran los resultados obtenidos al variar la distancia del punto fuente P al elemento de contorno Γ_e.

Tabla 4. Exactitud de los resultados.

d(P, τ _E)	Error (N=4)	Error (N=6)	Error (N=8)
0.5	0.194703 × 10 ⁻⁷	0.158075 × 10 ⁻⁷	0.188500 × 10 ⁻⁷
1.2	0.499418 × 10 ⁻⁷	0.220665 × 10 ⁻⁷	0.320000 × 10 ⁻⁷
5	0.524022 × 10 ⁻⁷	0.232560 × 10 ⁻⁷	0.431750 × 10 ⁻⁷

Como puede observarse los errores generados son pequeños, por lo que se pueden considerar despreciables y concluir que tienen la misma precisión.

4.2 Tiempos de Cpu

Los tiempos de CPU empleados por la subrutinas simbólicas y numéricas (Gauss con 4, 6 y 8 puntos de integración), son dados en la tabla 5.

Tabla 5. Tiempos de CPU.

subrutina	No de Elementos	Numérica (sec)	Simbólica (sec)	Ahorro (%)
Simbólica-1 Gauss de orden 4	10	0.0620	0.0150	75.8
	100	0.6109	0.143	76.5
	1000	6.090	1.35	77.8
Simbólica-2 Gauss de orden 6	10	0.078	0.031	60.2
	100	0.776	0.302	61.0
	1000	7.66	3.10	59.5
Simbólica-3 Gauss de orden 8	10	0.141	0.091	35.4
	100	1.39	0.90	35.2
	1000	13.87	9.01	35.0

5. CONCLUSIONES

Esta investigación, permitió desarrollar una metodología semi-analítica para la integración de matrices de elementos de contorno curvo de tres nodos, en problemas de elasticidad 2D, cuando el punto fuente no pertenece al elemento. Los códigos computacionales con la técnica desarrollada, logro reducir los tiempos de cómputos empleados por las integraciones numérica Gaussiana de cuatro, seis y ocho puntos de integración, en un 76%, 61% y 35% respectivamente. Los resultados obtenidos mantuvieron la precisión de los resultados obtenidos por integración Gaussiana, por lo cual se logró mejorar la eficiencia computacional del MEC.

RECEIVED: APRIL, 2019.
REVISED: MAY, 2019

REFERENCIAS

- [1] ALARCON, E., DOBLARÉ, M., and SANZ-SERNA, J. (1991): Evaluación de integrales singulares y cuasisingulares en el método de los elementos de contorno bidimensional mediante transformaciones no lineales. **Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería**, 7, 123–137.
- [2] CERROLAZA, MIGUEL and ALARCON, E. (1989): Un nuevo procedimiento numérico valor principal de Cauchy en métodos de contorno. **Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería**, 5, 203–218.
- [3] CERROLAZA, M., and OSORIO, J. C. (2012): Relations among stiffness coefficients of hexahedral 8-noded finite elements: A simple and efficient way to reduce the integration time. **Finite Elements in Analysis and Design**, 55, 1–6.
- [4] CHIRINOS, F., MAESO, O., AZNÁREZ, J. (1998): Una técnica simple para el cálculo de las integrales en el sentido del valor principal en el MEC 3D. **Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería**, 16, 77–95.
- [5] CRUSE, T. A. (1969): Numerical Solutions in three Dimensional Elastostatics. **Int. J. Solids Structures**, 5, 1259–1274.
- [6] DOMINGUEZ, L., GRACIA, L., DOBLARÉ, M. (1995): Evaluación de las integrales singulares del MEC tridimensional mediante transformaciones no lineales. **Revista Internacional de Métodos Numéricos Para Cálculo y Diseño En Ingeniería**, 11, 61–70.
- [7] GRIFFITHS, D. V. (1994): Stiffness matrix of the four-node quadrilateral element in closed form. **International Journal for Numerical Methods Engineering**, 37, 1027–1038.
- [8] LCHAT, J. C., and WATSON, J. O. (1976): Effective numerical treatment of Boundary Integral Equations: A formulation for three-dimensional elastostatics. **Int. J. Num. Meth. Eng.**, 10, 991–1005.
- [9] LOZADA, I. J., OSORIO, J. C., GRIFFITHS, D. V., and CERROLAZA, M. (2006): Semi-analytical integration of the 8-node plane element stiffness matrix using symbolic computation. **Numerical Methods for Partial Differential Equations**, 22, 296–316.
- [10] NAKAGUMA, R. K. (1979): **Three dimensional electrostatics using the boundary element method**. Southampton University.UK

- [11] OSORIO, J. C., CERROLAZA, M., and PEREZ, M. (2018): Optimising the stiffness matrix integration of n-noded 3D finite elements. **International Journal of Computational Science and Engineering**, 16, 173.
- [12] PADHI, G. S., SHENOI, R. A., MOY, S. S. J., and MCCARTHY, M. A. (2001): Analytic integration of kernel shape function product integrals in the boundary element method. **Computers and Structures**, 79, 1325–1333.
- [13] PARIS, F., and CAÑAS, J. (1997): **Boundary element method: fundamentals and applications**. Oxford University Press. Oxford.
- [14] RIZZO, F. J. (1967): An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quarterly of Applied Mathematics**, 25, 83–95.
- [15] TELLES, C. F. (1981): Boundary Element Solution For Half-Plane Problems. **Int. J. Solids Structures**, II, 1149–1158.
- [16] WANG, C. Y., and DENDA, M. (2007): 3D BEM for general anisotropic elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, 44, 7073–7091.
- [17] ZHANG, X., and ZHANG, X. (2008): Exact integration for the hypersingular boundary integral equation of two-dimensional elastostatics. **Structural Engineering and Mechanics**, 30, 279–296.