

MODELO MATEMÁTICO Y SISTEMA COMPUTACIONAL PARA LA SOLUCIÓN EFICIENTE DE PROBLEMAS DE CORTE 2D MEDIANTE PROGRAMACIÓN LINEAL EN ENTEROS

Juan Felipe Medina Mendieta* Narciso Rubén de León Rodríguez**¹ Javier Leiva Cáceres***,

*Universidad de Cienfuegos, Cuba.

**Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Ecuador.

***Universidad de Cienfuegos, Cuba.

ABSTRACT

This article summarizes the most important results out of an investigation whose general objective was defined as “using Integer Linear Programming (ILP) to resolve two-dimensional (2D) material cutting of rectangular pieces”. It presents an alternative approach of material cutting different than the classic methods, addressing the problem by using “cutting of substitution variants” (e.g. larger pieces are considered as though they were raw material too). These substitution-variants are later defined as new unknowns in the mathematical modeling of the situation being studied, to generally reduce the number of variables in the model. A Software was designed and implemented with an algorithm for the generation of 2D cutting variants, which executes the mathematical processing from the model and interprets the results obtained in a practical way. Also as an example, this article shows the results on comparing the use of the proposed solution versus the heuristic route when solving 2D cutting problems. The Software was deployed in a polygraphic company whose production process involves the cutting of rectangular pieces of cardboard, with satisfactory results in the control of the production and a significant reduction in raw material waste.

KEYWORDS: mathematical modeling, material cutting, material cutting software.

MSC: 90C10

RESUMEN

En el artículo se presentan los principales resultados obtenidos durante el desarrollo de una investigación que definió como objetivo general “utilizar la Programación Lineal en Enteros (PLE) en la solución de problemas de corte de materiales en dos dimensiones (corte 2D) para piezas rectangulares”. Se utiliza una opción alternativa a las clásicas al abordar el problema a través de la implementación en el corte de variantes de sustitución (se consideran las piezas de mayor tamaño como si fueran también materia prima) definidas después como nuevas incógnitas en la modelación matemática de la situación en estudio para disminuir en general la cantidad de variables en el modelo. Se diseña e implementa un sistema informático (programa computacional que tiene implícito un algoritmo para la generación de variantes de corte 2D) que ejecuta el procesamiento matemático del modelo e interpreta de forma práctica los resultados obtenidos. También es presentado, a modo de ejemplo, una comparación entre la utilización de la opción propuesta y la vía heurística al resolver problemas de corte 2D. La propuesta presentada fue puesta en práctica en una empresa poligráfica, que en su proceso productivo está involucrada en el corte de piezas rectangulares de cartón, con resultados satisfactorios en el control de la producción y reducción significativa en los desperdicios de materia prima.

PALABRAS CLAVE: modelación matemática, corte de materiales, sistema informático.

1. INTRODUCCIÓN

El corte de materiales es un proceso común en nuestros días. Cuenta con tres elementos fundamentales: materia prima (material primario sobre el cual realizar los cortes); piezas a cortar (elementos a cortar a partir de la materia prima), y variante de corte (forma de combinar las piezas a cortar en la materia prima al realizar el corte, también se conoce como patrón de corte).

La solución de problemas de corte 2D para piezas rectangulares es abordada, generalmente, desde métodos exactos y/o heurísticos [21].

Han sido publicados numerosos trabajos referentes a esta temática desde mediados del siglo XX hasta la actualidad. Pueden consultarse las excelentes revisiones bibliográficas de Wang y Wäscher (2002) [26] y Peña Calderón (2017) [23]. Wang y Wäscher hacen una reseña sobre el desarrollo de esta línea de investigación a finales del siglo XX mientras que Peña Calderón realiza un estudio bibliográfico del tema.

¹ Corresponding Author: rdleon.rodriguez@gmail.com

Precursores de esta línea de investigación como: Kantorovich (1960) [17], Gilmore y Gomory (1963) [14] y Dyckhoff (1990) [10], sentaron las bases de este tema y catalogaron estos problemas de una complejidad de NP-Hard debido a las diferentes combinaciones de cortes que pueden existir y la extensión del espacio de búsqueda de una solución.

Los métodos exactos, eje básico de la investigación que se resume en este artículo, consisten fundamentalmente en desarrollar los dos pasos clásicos siguientes: encontrar, primero, todas las posibles combinaciones de corte (variantes de corte) que pueden tener sobrantes de materia prima no utilizables para obtener otras piezas, considerados desperdicios, y modelar matemáticamente la situación en estudio mediante PLE.

Este problema fue presentado por Kantorovich (1960) en una aplicación en la industria. Gilmore y Gomory (1961-1963) [13] [14] presentaron formalmente el modelo matemático de PLE correspondiente. Esta modelación presenta gran cantidad de variables (patrones de corte), por ello Gilmore y Gomory realizaron una relajación para la restricción de enteras (que tenían las variables) y propusieron el método simplex con una técnica de generación de columnas y la aplicación de procedimientos de redondeo para la solución (en caso de no resultar un número entero). Estos autores extendieron el análisis a problemas de corte en dos dimensiones, objeto de estudio de esta investigación, abordando la situación como caso unidimensional en dos etapas; y presentaron el enfoque de solución a partir de la programación en enteros con técnicas de generación de columnas y determinado nivel de efectividad para problemas de pequeña y mediana escala.

Estudios orientados a problemas de mayor escala, comunes en aplicaciones prácticas actuales, combinan técnicas exactas con heurísticas y programación dinámica. Destacan trabajos como: Christofides (1995) [5] quien no utiliza restricciones para la cantidad de piezas a obtener y desarrolla un árbol de búsqueda en el que usa relajaciones en la formulación del problema mediante programación dinámica; Rönnqvist (1995) [24] quien utiliza relajación Lagrangiana; Antonio (1999) [3] propone dos métodos basados en programación dinámica; Baldacci (2007) [4] propone un enfoque de dos niveles en el que se maximiza el valor total de las piezas cortadas mediante una reducción de procedimiento que para el cálculo de cotas superiores utiliza desigualdades con el fin de reforzar los límites; Mobasher (2012) [20] propone un modelo de programación lineal entera mixta y como método de solución dos algoritmos de búsqueda local y la técnica de generación de columnas basada en un algoritmo heurístico; Delorme (2015) [9] plantea una revisión de la modelación matemática y algoritmos desarrollados para la solución exacta de estos problemas, caso una dimensión, así como los principales software y herramientas disponibles y Filho (2018) [12] utiliza un modelo bi-objetivo que minimiza aquellos patrones de corte que convergen a la demanda mínima para cada pieza a obtener y la cantidad de patrones de corte que son utilizados, caso una dimensión.

Los métodos exactos puros, tal y como fueron abordados por Gilmore y Gomory, tienen la ventaja de encontrar la solución óptima del problema (con el mínimo desperdicio posible); sin embargo, presentan los inconvenientes que aparecen a continuación: alta complejidad en el algoritmo para la generación de las variantes de corte; Modelo Matemático (MM) con gran número de variables (cada variante de corte es una variable en el MM y por lo general existen muchas combinaciones para llevar a cabo los cortes), y alto costo computacional y/o de tiempo al procesar el MM (esto último se debe a la gran cantidad de variables en el modelo; también que las variables tienen la condición de ser números enteros y el sistema de restricciones del problema a resolver está definido por igualdades). Debido a estas desventajas son utilizados, frecuentemente, métodos heurísticos para obtener buenas soluciones en estos tipos de problemas [11] [15] [22] [16] [2] [19].

Como se observa se presentan investigaciones que abordan estos problemas desde diversos enfoques (en la solución) donde están entre otros los métodos exactos y/o heurísticos, sin embargo, aún no se tiene un método general establecido para dar solución a los mismos, debido fundamentalmente, a la complejidad que se tiene asociada a cada situación.

Se destaca en los últimos años, esfuerzos por resolver estos problemas de programación lineal a través del algoritmo Branch and Bound o Branch and Price que combina el método clásico con los planos cortantes de Gomory.

A pesar de lo anteriormente expuesto se puede decir que el desarrollo de la computación en la actualidad permite disminuir el tiempo y aumentar los recursos computacionales de procesamiento. Modelaciones alternativas disminuyen considerablemente la cantidad de variables sin perder el sentido de las mismas, lo cual permite a los autores del presente trabajo abordar estos tipos de problemas utilizando métodos exactos, en particular la PLE, asistidos por un programa informático creado a tales efectos y denominado "Optivacomulti".

El sistema informático anteriormente mencionado, que define de forma resumida los objetivos trazados para el desarrollo de la investigación, integra en un solo producto los elementos que se presentan a continuación: algoritmo para la generación de las variantes de corte; modelación matemática alternativa

utilizando PLE y con disminución considerable del número de variables; procesamiento computacional del modelo mediante el método Branch and Bound, e interpretación de la solución.

2. DESCRIPCIÓN DE OBJETOS TRATADOS EN LA INVESTIGACIÓN

2.1. Algoritmo implementado en la investigación para la generación de las variantes de corte 2D.

Paso 1. Se ordenan descendientemente las materias primas y piezas a obtener respectivamente según su área.

Paso 2. Se toma la primera pieza y se trata de insertar en la primera materia prima. Al ser insertada se realiza un corte horizontal sobre la materia prima de manera que se obtienen dos rectángulos, que en lo adelante se llamarán áreas disponibles, donde se pudieran insertar más piezas. Se trata de seguir insertando esa misma pieza en la primera de las áreas disponibles. En caso de no ser posible insertarla se gira 90 grados y se verifica si puede ser insertada. Cuando no pueda ser insertada esta pieza se toma la siguiente pieza de menor área, en el orden que le sigue, y se repite este proceso con esta pieza. Cuando no puedan ser insertadas más piezas en ninguna de las áreas disponibles se finaliza este paso y se obtiene la primera variante de corte.

Paso 3. Se genera la siguiente variante de corte a partir de la anterior inmediata generada. Primeramente se gira 90 grados la última pieza insertada, si la pieza ha sido girada con éxito se verifica si en las áreas disponibles puede ser insertada alguna otra (pieza), si esto último no es posible, entonces se ha obtenido una nueva variante de corte. En el caso de que la pieza no haya sido girada con éxito se debe probar insertar la siguiente (pieza) para después chequear si en las áreas disponibles no puede ser insertada ninguna otra (pieza), de no ser posible esto último entonces se tiene una nueva variante de corte. Seguidamente se elimina la última pieza insertada y la anterior pieza insertada a ella pasando a formar parte de áreas disponibles los espacios que estas ocupaban. A continuación se tratan de insertar en las áreas disponibles las piezas comenzando por la de mayor área. De no poderse insertar se intenta girando 90 grados. De no poderse insertar se prueba con la siguiente pieza en el orden que le sigue. Se obtiene una nueva variante de corte cuando no puedan ser insertadas más piezas. Este paso se repite de manera que se generen diferentes variantes de corte.

Cuando ninguna pieza insertada puede ser girada ni sustituida por otra pieza más pequeña que ella se termina el paso 3.

Paso 4. Se repite el algoritmo desde el paso 2 realizando los cortes al insertar cada pieza de forma vertical. Este proceso generará variantes de corte no encontradas con anterioridad, además, variantes de corte repetidas que son eliminadas.

Paso 5. Repetir los pasos del 2 al 4 con cada materia prima, de manera que se obtienen las variantes de corte correspondientes a cada una. Una vez terminado este proceso se llega al final del algoritmo [18].

Observación: El algoritmo (de cinco pasos) definido anteriormente fue la base para el diseño e implementación en el software “Optivacomulti” de la parte correspondiente a la obtención de las variantes de corte 2D en piezas rectangulares que después se transforman en variables para el modelo matemático que describe la situación en estudio.

2.2. Modelación matemática de la situación en estudio.

El análisis, en lo que respecta a la modelación matemática de la situación en estudio, comienza a partir del modelo matemático clásico (modelo de PLE) de Kantorovich [17] para problemas de corte de materiales que se presenta a continuación:

Modelo matemático clásico.

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_{j=1}^m a_{ij} \cdot x_j &= b_i; \quad i = 1, \dots, m \\ x_j &\geq 0; \quad x_j \in Z; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned} \tag{1}$$

Donde:

n: Cantidad de variantes de corte.

m: Cantidad de tipos de piezas.

- j: Índice de la variante de corte.
i: Índice de la pieza.
b_i: Necesidad de piezas tipo “i”.
c_j: Costo unitario de la variante de corte “j”.
a_{ij}: Cantidad de piezas tipo “i” producidas al utilizar la variante de corte “j”.
x_j: Cantidad de veces que se utiliza la variante de corte “j”.
Z: Conjunto de los números enteros.

En la modelación clásica (modelo (1)) cada variable representa una variante de corte; los coeficientes de la función objetivo, el desperdicio correspondiente a ella, y los términos independientes de las restricciones de igualdad, la demanda por cada tipo de pieza a cortar. Esta modelación matemática presenta los siguientes inconvenientes: gran número de variables en el modelo; alto costo en tiempo cuando se aplica el método de solución al modelo de PLE, e incompatibilidad (en muchos casos) al obtener la solución debido a las restricciones de igualdad. A continuación se presenta una modelación alternativa con el objetivo de disminuir los inconvenientes de alto costo e incompatibilidad en la obtención de la solución.

Modelo matemático alternativo. [8]

$$\begin{aligned} \min DMP &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} d_{jk} \cdot x_{jk} \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} p_{ijk} \cdot x_{jk} &\geq N_i; \quad i = 1; \dots; m \\ \sum_{j=1}^{n_k} x_{jk} &\leq Q_k; \quad k = 1; \dots; r \\ x_{jk} &\geq 0; \quad x_{jk} \in Z; \quad j = 1; \dots; n \end{aligned} \tag{2}$$

Donde:

- n: Cantidad de variantes de corte.
m: Cantidad de tipos de piezas.
r: Cantidad de tipos materia prima.
Q_k: Cantidad de unidades de materia prima de tipo “k”.
j: Índice de variante de corte.
i: Índice de pieza.
k: Índice de tipo de materia prima.
N_i: Necesidad de piezas tipo “i”.
DMP: Desperdicio de materia prima.
d_{jk}: Desperdicio de materia prima tipo k según la variante de corte “j”.
p_{ijk}: Cantidad de piezas tipo “i” que se obtienen al cortar una unidad de materia prima de tipo k según la variante de corte “j”.
x_{jk}: Cantidad de veces a utilizar la variante de corte “j” en el tipo de materia prima “k”.
n_k: Cantidad de variantes de corte para la materia prima “k”.
Z: Conjunto de los números enteros.

El modelo matemático (2) presenta también el inconveniente de gran cantidad de variables, pero disminuye el alto costo en tiempo al aplicar el método de solución al modelo de PLE y se elimina la incompatibilidad en la obtención de la solución debido a la sustitución del signo de = por el de ≥ en las restricciones de demanda, sin embargo, aumentan los sobrantes por tipo de pieza. Se utiliza entonces una segunda modelación alternativa de manera que se eliminen los inconvenientes presentados en las dos anteriores y aparecen las denominadas variantes de sustitución (se consideran hipotéticamente las piezas de mayor área como si fueran también materia prima y se combinan sobre ellas las de menor dimensión). En la definición de este modelo (para procesos de corte bidimensional) se toma como punto de referencia el utilizado para el caso unidimensional por uno de los autores de este trabajo en el artículo titulado “Métodos Matemáticos en la Dirección de Procesos de Corte de Materiales” [7].

Segundo modelo matemático alternativo (definido en el contexto de la investigación como final).

$$\begin{aligned} \min DMP &= \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} d_{jk} \cdot x_{jk} + \sum_{u=n+1}^{n+t+1} b_u \cdot x_u \\ \text{sujeto a:} \\ \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^{n_k} p_{ijk} \cdot x_{jk} + \sum_{u=n+1}^{n+t+1} a_{iu} \cdot x_u &= N_i; \quad i = 1; \dots; m \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n_k} x_{jk} \leq Q_k; k = 1; \dots; r$$

$$x_{jk} \geq 0; x_{jk} \in \mathbb{Z}; j = 1; \dots; n$$

$$x_u \geq 0; x_u \in \mathbb{Z}; u = n + 1; \dots; n + t + 1$$

$$n = \sum_{k=1}^r n_k$$

Donde:

n: Cantidad de variantes de corte.

m: Cantidad de piezas a cortar.

r: Cantidad de tipos de longitudes de materia prima.

Q_k : Cantidad de unidades de materia prima de tipo “k”.

j: Índice de variante de corte.

i: Índice de pieza.

k: Índice del tipo de materia prima.

N_i : Necesidad de piezas tipo “i”.

DMP: Desperdicio de materia prima.

d_{jk} : Desperdicio de materia prima de tipo “k” según la variante de corte “j”.

p_{ijk} : Cantidad de piezas tipo “i” que se obtienen al cortar una unidad de materia prima de tipo “k” según la variante de corte “j”.

x_{jk} : Cantidad de veces a utilizar la variante de corte “j” en el tipo de materia prima “k”.

u: Índice de variante de sustitución.

t: Cantidad de variantes de sustitución.

x_u : Cantidad de veces a utilizar la variante de sustitución “u”.

b_u : Desperdicio de materia prima generado por la variante de sustitución “u”.

a_{iu} : Coeficiente de utilización de la pieza tipo “i” en la variante de sustitución “u”.

n_k : Cantidad de variantes de corte para la materia prima de longitud tipo “k”.

Z: Conjunto de los números enteros.

El modelo matemático (3) disminuye significativamente la cantidad de variables con respecto a los dos tratados con anterioridad al no tener en cuenta las variantes que pueden ser expresadas como la suma de una de corte y otra de sustitución, también disminuye aún más el costo en tiempo al aplicar el método de solución al modelo de PLE, mantiene eliminada la incompatibilidad en la obtención de la solución y reduce los sobrantes por tipo de pieza llevando estos (en caso de que existan) a la más pequeña. Es decir, este modelo alternativo final determina un desperdicio mínimo, mantiene las restricciones de igualdad en la demanda del modelo (1) que garantiza la necesidad exacta para las piezas de mayor dimensión y lleva los posibles sobrantes (de todas las piezas) únicamente a la menor.

2.3. Sistema implementado para el análisis matemático informatizado de la situación en estudio. Sistema informático “Optivacomulti”.

El sistema diseñado y utilizado en la investigación integra: método de generación de variantes de corte, búsqueda de dependencia entre las variantes de corte para no incluir en el modelo las que resulten de la combinación de otras dos, generación del modelo matemático alternativo final a partir de las variantes de corte que resultaron independientes, procesamiento computacional del modelo para la obtención de la solución óptima e interpretación de resultados.

Observaciones:

- ✓ La figura 1 presenta parte del reporte de solución óptima (en este acaso para la materia prima de 100 x 70) emitida en el Optivacomulti. De igual forma lo hace para todas las materias primas involucradas en el análisis y que serán utilizadas en la ejecución del plan de corte definido en el estudio realizado.
 - Plan de corte: Forma de cortar la materia prima por parte del operario según el resultado emitido al procesar, a través del sistema informático, el modelo matemático que describe la situación en estudio. En la figura 1 se muestra cómo cortar la materia prima de dimensiones 100 centímetros de largo por 70 de ancho.
- ✓ El gráfico de la izquierda presenta la forma de combinar las piezas (indicando la posición horizontal de la pieza con el número 1 y la vertical con el 2) en la materia prima (para el caso las dimensiones son 100 x 70). En la leyenda de la parte derecha se indica lo siguiente (de arriba hacia abajo): veces a utilizar la variante de corte (en este caso una); unidad de medida utilizada en el análisis (para el caso cm); dimensiones de la materia prima (en este caso 100 x 70); desperdicio parcial inherente a esa variante de corte; desperdicio total inherente a todas las variantes de corte utilizadas; los tipos de piezas involucradas en el análisis (en este caso hay 4 tipos de piezas y en esa variante se combinan

solamente las piezas de dimensiones 43 x 28 y 33 x 21,6), y por último las posiciones de las piezas en la materia prima.



Figura 1. Ejemplo. Reporte de salida en el software “Optivacomulti”.

3. EXPERIMENTACIÓN. COMPARACIÓN DEL MÉTODO PROPUESTO EN LA INVESTIGACIÓN CON LA VÍA HEURÍSTICA

A modo de hacer referencia a otros métodos utilizados en el corte 2D de materiales, y sin interés alguno de desvirtuar los mismos, se presenta a continuación (a partir de algunos elementos predefinidos por los autores para realizar la comparación) un análisis comparativo de resultados (para una situación real estudiada en la práctica) entre la opción propuesta en el artículo y la vía heurística actualmente muy utilizada al abordar el problema tratado en la investigación.

La experimentación se efectuó a partir de estudios realizados (en la ejecución de planes de corte) en una empresa poligráfica. En esta entidad se realiza el corte de diferentes pliegues de cartones rectangulares de alta calidad y dimensiones estándares para la encuadernación de libros. En este estudio se utilizó como materia prima cartones de dimensión 100 cm por 70 cm que se encontraba en explotación en ese momento en la entidad. Las piezas a cortar, desde la materia prima antes mencionada, fueron cartones rectangulares con los cuales se conformaban carátulas de libros. Las dimensiones (diversas) de estas carátulas dependieron de los distintos libros que en ese momento se deseaban encuadernar.

Se constató que el corte se realizaba de forma empírica por parte de los técnicos de la entidad, los cuales cortaban según su experiencia incurriendo en grandes desperdicios de cartulina, lo que significaba aumento de costos por concepto de compra de materia prima.

Se tomó inicialmente una muestra piloto de 11 planes de corte (en la primera experimentación) ejecutados por los técnicos a partir de su conocimiento empírico, registrando en cada uno de ellos el desperdicio ocasionado. Se procedió a procesar los mismos mediante el software Optivacomulti (resultado del estudio realizado en la presente investigación) y el software comercial profesional Corte Certo 2D [6] (conocido internacionalmente) que utiliza técnicas heurísticas.

En este sentido se llegaron a dos primeros resultados importantes: la utilización de la modelación matemática, utilizando PLE o técnicas heurísticas, hubieran disminuido el desperdicio en el 90,91% de las ocasiones en los planes de corte estudiados; y la utilización de la modelación matemática (utilizando PLE) hubiera permitido ahorrar el 12,25% de la materia prima utilizada en los planes de corte estudiados. Se estudió la reducción de variables al utilizar el modelo matemático (3), y también el tiempo de procesamiento para la obtención de la solución junto con los desperdicios que se dan en la misma al hacer uso de la modelación matemática (utilizando PLE) comparado con los que se hubieran obtenido utilizando técnicas heurísticas.

Las variables que aparecen en el procesamiento estadístico se definieron de la forma siguiente:

Rv: Por ciento de reducción de variables aplicando el modelo (3) con respecto al modelo (2).

Te: Tiempo (en segundos) de procesamiento del modelo (3) para la obtención de la solución óptima utilizando el software Optivacomulti que utiliza técnicas exactas.

Th: Tiempo (en segundos) de procesamiento para la obtención de la solución utilizando el software Corte Certo 2D que utiliza técnicas heurísticas.

De: Desperdicio obtenido (en cm^2) al procesar un plan de corte utilizando el software Optivacomulti que utiliza técnicas exactas.

Dh: Desperdicio obtenido (en cm^2) al procesar un plan de corte utilizando el software Corte Certo 2D que utiliza técnicas heurísticas.

Experimento 1. Comparación de la cantidad de variables del modelo (3) vs modelo (2).

La tabla 1 presenta el porcentaje de reducción de variables obtenido para la muestra piloto (de 11 planes de corte) una vez procesado el modelo (3) (en el software “Optivacomulti”) con respecto al (2).

Plan de corte	Cantidad de variables según modelo (2)	Cantidad de variables según el modelo (3)	Rv
1	50	22	56,00
2	68	22	67,65
3	92	28	69,57
4	148	42	71,62
5	236	56	76,27
6	256	54	78,91
7	166	38	77,11
8	155	42	72,90
9	95	24	74,74
10	79	26	67,09
11	67	25	62,69

Tabla 1. Por ciento de reducción de variables en la modelación alternativa final.

Se aplicó la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov con la corrección de Lilliefors, tabla 2, para la variable Rv y se puso de manifiesto que no existe razón para rechazar que la muestra piloto proviene de una población con distribución normal.

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test data: Rv D = 0.13107, p-value = 0.8616

Tabla 2. Prueba de bondad de ajuste para la muestra piloto. (Software R).

Generalización para la comparación en cantidad de variables del modelo (3) vs modelo (2).

Se calculó el tamaño de muestra a utilizar en una prueba “t” para la media de una población con distribución normal [25], en el cual se utilizó un error tipo I adecuado igual a 0,05 y la varianza estimada a partir de la muestra. El error máximo de estimación se fijó a la mitad del estimado a partir de la muestra piloto. El resultado arrojó un tamaño de muestra igual a 44 planes de corte (en este caso a los 11 planes de corte utilizados en el experimento #1 se agregaron 33 más). Con este tamaño de muestra se procedió a realizar la prueba “t” de la media en una población con distribución normal para el caso que el porcentaje de reducción de variables supere el 60%. La significación asintótica unilateral (p-value) mostrada en la tabla 3, menor que 5% pone de manifiesto que el modelo (3), reduce en más de un 60% el número de variables con respecto al modelo (2).

One Sample t-test data: Rv_44 t = 10.846, df = 43, p-value < 3.467e-14 alternative hypothesis: true mean is greater than 60 95 percent confidence interval: 67.78844 Inf sample estimates: mean of x 69.21705

Tabla 3. Prueba “t” para la media de una población con distribución normal. (Software R).

Experimento 2. Comparación (tiempo de corrida y desperdicios) entre software: Optivacomulti vs Corte Certo 2D.

La tabla 4 presenta los tiempos de procesamiento en la obtención de la solución y los desperdicios obtenidos en la muestra piloto (de 11 planes de corte) una vez procesado en cada software

respectivamente. Para medir el tiempo de procesamiento se utilizó la misma computadora: procesador Intel(R) Core (TM) i5-7200U CPU @ 2.50GHz 2.71Ghz y memoria RAM de 8,00 GB.

Plan de corte	Te	De	Th	Dh
1	88,21	653,5	0,15	653,69
2	26,03	797,5	0,21	797,7
3	96,36	1244,5	1,26	2015,01
4	132,01	1187	4,23	1957,84
5	263,26	1269	4,28	2039,28
6	276,15	1556	7,52	2326,76
7	235,46	2078,5	2,23	2848,69
8	226,57	1447	1,12	2216,96
9	102,15	1369,5	0,56	1370,12
10	72,09	1254	0,18	2023,79
11	46,38	663	0,31	1652,81

Tabla 4. Tiempo de procesamiento en la obtención de la solución y desperdicios de planes de corte utilizando el software Optivacomulti (utiliza técnicas exactas) y el software Corte Certo 2D (utiliza técnicas heurísticas).

Generalización para la comparación en (tiempo de corrida y desperdicios) entre software: Optivacomulti vs Corte Certo 2D.

Se aplicó la prueba de bondad de ajuste de Kolmogorov-Smirnov con la corrección de Lilliefors, tabla 5, para cada variable y se puso de manifiesto que para las muestras referentes a las variables: Te, De y Dh no existe razón para rechazar que provienen de poblaciones con distribución normal. Sin embargo no fue así con la muestra piloto referente a la variable Th. Para el análisis del desperdicio obtenido aplicando técnicas exactas y técnicas heurísticas se calculó el tamaño de muestra a utilizar en una prueba de comparación de dos medias pareadas [1], para lo cual se utilizó un error tipo I y II adecuados, respectivamente, igual a 0,05. La varianza se estimó a partir de ambas muestras y se asumieron iguales a partir de la prueba de homogeneidad de varianzas de Levene. El resultado arrojó un tamaño de muestra igual a 17 planes de corte (en este caso a los 11 planes de corte utilizados en el experimento #1 se agregaron 6 más). Para el análisis del tiempo de procesamiento desde los sistemas informáticos Optivacomulti y Corte Certo 2D se utilizaron los mismos 17 planes de corte.

La figura 2 muestra el tiempo de procesamiento que cada software, Optivacomulti y Corte Certo 2D, utilizaron para encontrar la solución. El tiempo utilizando métodos exactos fue superior en cada plan de corte ejecutado.

Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test data: De D = 0.1871, p-value = 0.3478
Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test data: Dh D = 0.22642, p-value = 0.1187
Lilliefors (Kolmogorov-Smirnov) normality test data: Te D = 0.21577, p-value = 0.1625

Tabla 5. Prueba de bondad de ajuste para las muestras pilotos. (Software R).

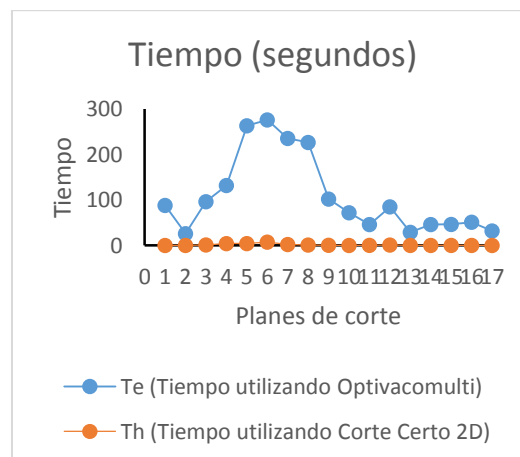


Figura 2. Tiempo de procesamiento de cada plan de corte utilizando Optivacomulti y Corte Certo 2D.


```

Wilcoxon signed rank test
data: Te and Th
V = 153, p-value = 0.000007629
alternative hypothesis: true location shift is greater than 0

```

Tabla 6. Prueba de suma de rangos de Wilcoxon para dos muestras pareadas. (Software R)

```

Wilcoxon signed rank test with continuity correction
data: Te
V = 0, p-value = 0.0001602
alternative hypothesis: true location is less than 300

```

Tabla 7. Prueba de suma de rangos de Wilcoxon para una muestra. (Software R)

La figura 3 muestra el desperdicio obtenido utilizando cada método (exacto y técnicas heurísticas) para ejecutar el corte. Los desperdicios obtenidos utilizando métodos exactos fueron inferiores o iguales a los que resultaron de utilizar técnicas heurísticas.

La tabla 8 muestra la prueba “t” para la comparación de medias en dos muestras pareadas. La hipótesis alternativa consistió en comparar si el desperdicio obtenido utilizando técnicas exactas era estadísticamente inferior a los que resultaron de utilizar técnicas heurísticas. La significación asintótica unilateral (p-value) menor que 5% pone de manifiesto que el desperdicio obtenido utilizando técnicas exactas fue significativamente inferior.

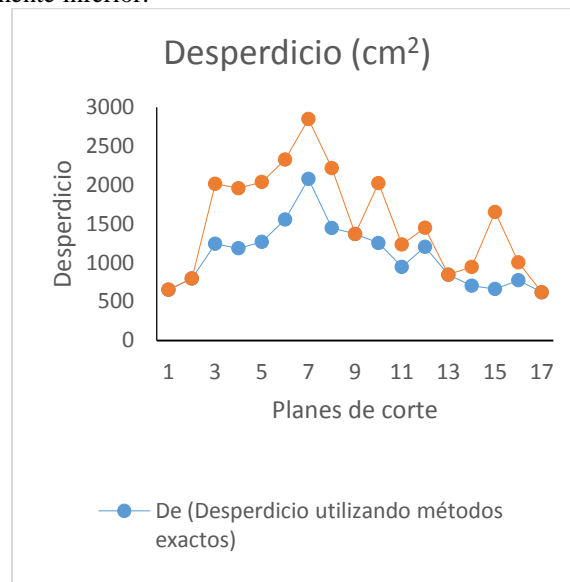


Figura 3. Desperdicio de cada plan de corte utilizando métodos exactos y métodos heurísticos.

La tabla 6 muestra la prueba, no paramétrica, de suma de rangos de Wilcoxon para dos muestras pareadas. La hipótesis alternativa consistió en comparar si el tiempo de procesamiento en obtener la solución utilizando Optivacomulti (con técnicas exactas de solución) era estadísticamente superior al tiempo obtenido utilizando Corte Certo 2D (con técnicas heurísticas). La significación asintótica unilateral (p-value) menor que 5% pone de manifiesto que el tiempo utilizando técnicas exactas fue significativamente superior. Sin embargo, la prueba de suma de rangos de Wilcoxon para una muestra (expuesta en la tabla 7) pone de manifiesto que este tiempo de procesamiento para obtener la solución óptima utilizando Optivacomulti no supera los 5 minutos.

```

Paired t-test
data: De and Dh
t = -4.8566, df = 16, p-value = 0.00008748
alternative hypothesis: true difference in means is less than 0
95 percent confidence interval:
-Inf -278.3316
sample estimates:
mean of the differences
-434.5441

```

Tabla 8. Prueba t para dos muestras pareadas. (Software R)

4. CONCLUSIONES

- ✓ La posibilidad de utilizar un programa computacional (con conocimientos básicos de computación puede ser utilizado en la práctica) que integra en un producto único la generación de variantes (patrones) de corte 2D, la modelación matemática de la situación en estudio (disminuyendo notablemente las variables), el procesamiento matemático del modelo obtenido y la interpretación de los resultados, se convierte en un argumento irrefutable que robustece el empleo de técnicas exactas (con un enfoque diferente a los tradicionales) en la solución de problemas de corte bidimensional de piezas rectangulares con obtención de un desperdicio óptimo para la materia prima a emplear.
- ✓ La aplicación práctica en una empresa poligráfica (durante la preparación y ejecución de planes de corte de pliegues de cartulinas rectangulares para la obtención de carátulas de libros) del programa computacional presentado (como producto final del trabajo investigativo desarrollado) pone de manifiesto que ejecutar el proceso productivo, teniendo presente la opción propuesta, reduce significativamente el desperdicio de materia prima con respecto a la forma tradicional de realizar el trabajo y logra un nivel superior en la planificación y control de los recursos materiales y humanos.
- ✓ Al utilizar de forma práctica la modelación matemática alternativa final en la experimentación realizada en una empresa poligráfica se puso de manifiesto, para los problemas tratados, lo siguiente:
 - Una reducción de variables mayor al 60% con respecto a la modelación matemática tradicional (sin utilizar variantes de sustitución).
 - El tiempo de ejecución en la obtención de la solución utilizando el software Optivacomulti (resultado de la investigación; utiliza técnicas exactas) fue superior al transcurrido para hacer lo mismo por el programa computacional Corte Certo 2D (uno de los más difundidos en la actualidad para tratar estos problemas; utiliza técnicas heurísticas). Optivacomulti no invirtió más de 5 minutos en el procesamiento del modelo matemático.
 - Los desperdicios obtenidos utilizando Optivacomulti fueron de forma significativa, estadísticamente inferiores a los que resultaron al utilizar Corte Certo 2D.

RECEIVED: OCTOBER, 2019

REVISED: JANUARY, 2020.

REFERENCIAS

- [1] ALVARENGA, J.C.L., BERNAL, A.R., NAVARRO, M.P., COSSIO, S.S. (2010): Cómo se puede estimar el tamaño de la muestra de un estudio. **Dermatología Revista Mexicana**. 54(6), 375–379.
- [2] ANDRADE, R., BIRGIN, E.G., MORABITO, R. (2016): Two-stage two-dimensional guillotine cutting stock problems with usable leftover, **International Transactions in Operational Research**. 23(1-2), 121-145.
- [3] ANTONIO, J., CHAUVET, F., CHU, C., PROTH, J.M. (1999): The cutting stock problem with mixed objectives: Two heuristics based on dynamic programming. **European Journal of Operational Research**. 114(2), 395–402.
- [4] BALDACCI, R., BOSCHETTI, M.A. (2007): A cutting-plane approach for the two-dimensional orthogonal non-guillotine cutting problem, **European Journal of Operational Research**. 183(3), 1136-1149.
- [5] CHRISTOFIDES, N. and HADJICONSTANTINO, E. (1995): An exact algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts. **European Journal of Operational Research**. 83(1), 21–38.
- [6] Corte Certo (n.d.). Disponible en: <https://cortecerto.com/es/corte-certo-2d/caracteristicas/>. **Consulted** 15-10, 2019.
- [7] DE LEÓN J. (1996): **Métodos Matemáticos en la Dirección de los Procesos de Corte de Materiales**. Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos.
- [8] DE LEÓN, N.R., MEDINA, J.F., FUENTES, E.R. (2018): Un modelo matemático en el proceso de corte unidimensional de materiales. **Ciencia y tecnología**. 18, 21–32.
- [9] DELORME, M., IORI, M., MARTELLO, S. (2016): Bin Packing and Cutting Stock Problems: Mathematical Models and Exact Algorithms, **European Journal of Operational Research**. 255(1), 1-20.
- [10] DYCKHOFF, H. (1990): A typology of cutting and packing problems, **European Journal of Operational Research**. 44(2), 145-159.
- [11] FAGGIOLI, E., BENTIVOGLIO, C.A., (1998): Heuristic and exact methods for the cutting sequencing problem, **European Journal of Operational Research**. 110(3), 564–575.
- [12] FILHO, A.A., MORETTI, A.C., PATO, M.V. (2018): A comparative study of exact methods for the bi-objective integer one-dimensional cutting stock problem, **Journal of the Operational Research Society**. 69(1), 91-107.

- [13] GILMORE, P.C. and GOMORY, R.E. (1961): A linear programming approach to the cutting-stock problem, **Operations Research**. 9(6), 849–859.
- [14] GILMORE, P.C. and GOMORY, R.E. (1963): A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem—Part II. **Operations Research**. 11(6), 863–888.
- [15] HOPPER, E., TURTON, B. (1999): A genetic algorithm for a 2D industrial packing problem. **Computers & Industrial Engineering**. 37(1–2), 375–378.
- [16] JIN, M., GE, P., REN, P. (2015): A new heuristic algorithm for two-dimensional defective stock guillotine cutting stock problem with multiple stock sizes, **Tehnicki Vjesnik**. 22(5), 1107-1116.
- [17] KANTOROVICH, L.V. (1960): Mathematical Methods of Organizing and Planning Production, **Management Science**. 6(4), 366-422.
- [18] LEIVA J. (2018): **Sistema informático para la optimización de problemas de corte en dos dimensiones**. Universidad de Cienfuegos, Cienfuegos.
- [19] MA, N., LIU, Y., ZHOU, Z. (2019): Two heuristics for the capacitated multi-period cutting stock problem with pattern setup cost, **Computers & Operations Research**. 109, 218-229.
- [20] MOBASHER, A., EKICI, A. (2013): Solution approaches for the cutting stock problem with setup cost, **Computers & Operations Research**. 40(1), 225-235.
- [21] PARREÑO F. (2004): **Algoritmos heurísticos y exactos para problemas de corte no guillotina en dos dimensiones**. Universidad de Valencia, Valencia.
- [22] PELAEZ, J.I., LA RED, D., MESAS, A., DOÑA, J.M., VEINTIMILLA, J. (2004): Un Algoritmo Evolutivo Paralelo Adaptativo para el problema del Corte con Guillotina en 2D. **33 JAIIO Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa-Simposio de Investigación Operativa SIO**, Argentina.
- [23] PEÑA, D.A., OREJUELA, J.P., GIL, C.A. (2017): Cutting stock problem, classification and approaches, **Prospectiva**. 15(1), 112-126.
- [24] RÖNNQVIST, M. (1995): A method for the cutting stock problem with different qualities, **European Journal of Operational Research**. 83(1), 57–68.
- [25] WALPOLE, R.E., MYERS, R.H., MYERS, S.L. (2012): **Probabilidad y estadística para ingenieros**. Pearson Educación, México.
- [26] WANG, P.Y., WÄSCHER, G. (2002): Cutting and packing, **European Journal of Operational Research**. 141(2), 239–240.