SOLUCIÓN PERIÓDICA DE LA ECUACIÓN ESTOCÁSTICA DEL MODELO DE PRESA-DEPREDADOR

Farhouh Korichi*, Hisao Fujita Yashima***
*École Normale Supérieure de Kouba, Algérie.
École Nationale Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur, Rouiba, Algérie.
**École Normale Supérieure de Constantine, Algérie.

ABSTRACT
In this paper the existence of a periodic solution to the stochastic equation of prey-predator model under the conditions giving possibility to a period of passive life is proved (as hibernation). The proof is based on the particular construction of a Khas'minskii function.

KEYWORDS: stochastic equation of prey-predator model, periodic solution, hibernation, Khas'minskii function.
MSC: 34K50, 60H10.

RESUMEN
En este artículo se demuestra la existencia de una solución periódica de la ecuación estocástica del modelo de presa-depredador bajo condiciones que permiten un período de vida pasiva (como hibernación). La demostración se basa en la construcción particular de la función de Khas'minskii.

PALABRAS CLAVE: ecuación estocástica del modelo de presa-depredador, solución periódica, hibernación, función de Khas'minskii.

1. INTRODUCCIÓN

Entre los modelos matemáticos de la dinámica de poblaciones, la ecuación de Lotka-Volterra que modela la asociación de depredadores y presas, desde el célebre libro [15] de Volterra, interesaba a más investigadores. En efecto, en la naturaleza a menudo encontramos fenómenos de asociaciones entre especies animales o vegetales de tipo presa-depredador, que tienen aspectos interesantes. Citamos un ejemplo particularmente interesante: caso de "*boufaroua*" y mariquitas. La "*boufaroua*" es una especie de ácaro que se alimenta de frutas de dátil, mientras que la mariquita negra se alimenta de la primera y, como resultado, limita la población de la primera. El ciclo de vida de estas especies también está ritmado por las estaciones, ambas pasando un período de casi hibernación. La asociación de boufaroua y mariquita negra ha llamado la atención especialmente entre los investigadores de los países productores de dátiles (para más detalles, véanse [1, 12, 13, 7]).

*hisaofujitayashima@yahoo.com, hisaofujitayashima@qq.com

La versión estocástica de la ecuación de presa-depredador también fue analizada: en [3] los autores demostraron la existencia y la unicidad de la solución, mientras que en [11] Rudnicki demostró la existencia y la unicidad de la medida invariante para esta ecuación estocástica. El resultado de la existencia de Rudnicki fue generalizado igualmente en el caso en que se considera la difusión de poblaciones en un territorio ([5]). La demostración de la existencia de medida invariante se basa en el teorema de Khas'minskii (véase [6]). En la misma orientación de ideas, Khas'minskii demuestra también la existencia de una solución periódica para las ecuaciones estocásticas.
Sin embargo, en el caso en que haya un período de vida pasiva como en el caso de boufaroua y mariquitas citado arriba, es decir un período en que el índice de crecimiento demográfico natural (sin depredador) se vuelve negativo incluso para la población de presa, no podemos aplicar directamente el resultado de Khas'minskii. El propósito del presente trabajo es demostrar la existencia de una solución periódica de la ecuación estocástica del modelo de presa-depredador en condiciones que pueden admitir un período pasivo como un estado de casi hibernación. Para esto, utilizamos parcialmente la idea que propusimos en [9] (véase también [8]) para modelar la hibernación.
Para las generalidades de las ecuaciones estocásticas nos referimos a [2, 4, 10].

2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Ante todo, recordemos el sistema de ecuaciones estocásticas habituales del modelo de presa-depredador con los coeficientes dependientes de t, que tiene la forma

$$\begin{aligned} dX(t) &= [\alpha(t) - \beta(t)Y(t) - \mu(t)X(t)]X(t)dt + X(t)\varrho(t)dW, \\ dY(t) &= [-\gamma(t) + \delta(t)X(t) - \nu(t)Y(t)]Y(t)dt + Y(t)\sigma(t)dW, \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde

$$\varrho(t) = (\varrho_0(t), \varrho_1(t), 0), \qquad \sigma(t) = (\sigma_0(t), 0, \sigma_2(t)), \qquad W(t) = (W_0(t), W_1(t), W_2(t)).$$

Aquí $W(t) = (W_0(t), W_1(t), W_2(t))$ se debe considerar como movimiento browniano con valores en $\mathbb{R}^3$; $W_0(t)$ representaría la perturbación de las condiciones ambientales generales que afectan a ambas especies, mientras que $W_1(t)$ y $W_2(t)$ representarían las partes de perturbaciones ambientales que afectan independientemente a la población $X(t)$ y la población $Y(t)$ respectivamente.
Si ponemos

$$\xi(t) = \log X(t), \qquad \eta(t) = \log Y(t), \tag{2.2}$$

las ecuaciones (2.1) se convierten en

$$\begin{aligned} d\xi(t) &= [\alpha(t) - \beta(t)e^{\eta(t)} - \mu(t)e^{\xi(t)} - \frac{\varrho_0(t)^2 + \varrho_1(t)^2}{2}]dt + \varrho(t)dW, \\ d\eta(t) &= [-\gamma(t) + \delta(t)e^{\xi(t)} - \nu(t)e^{\eta(t)} - \frac{\sigma_0(t)^2 + \sigma_2(t)^2}{2}]dt + \sigma(t)dW. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Ahora especifiquemos las condiciones para los coeficientes que aparecen en las ecuaciones (2.3). Suponemos que

[I] $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$, $\gamma(\cdot)$, $\delta(\cdot)$, $\mu(\cdot)$, $\nu(\cdot)$, $\varrho_0(\cdot)$, $\varrho_1(\cdot)$, $\sigma_0(\cdot)$, $\sigma_2(\cdot)$ son funciones medibles periódicas de período T y acotadas;

[II] se verifican

$$\inf_{0\le t\le T}\beta(t)\equiv\kappa_\beta>0,\qquad \inf_{0\le t\le T}\delta(t)\equiv\kappa_\delta>0,$$

$$\inf_{0\le t\le T}\mu(t)\equiv\kappa_\mu>0,\qquad \inf_{0\le t\le T}\nu(t)\equiv\kappa_\nu>0;$$

[III] se verifica

$$\frac{1}{T}\int_0^T\Big[\alpha(t)-\frac{\varrho_0(t)^2+\varrho_1(t)^2}{2}\Big]dt\equiv c_1>0;$$

[IV] se verifica

$$-c_1\inf_{0\le t\le T}\frac{\nu(t)}{\beta(t)}<c_2<c_1\inf_{0\le t\le T}\frac{\delta(t)}{\mu(t)},$$

donde

$$c_2=\frac{1}{T}\int_0^T\Big[\gamma(t)+\frac{\sigma_0(t)^2+\sigma_2(t)^2}{2}\Big]dt.$$

La condición [III] significa que el índice de crecimiento demográfico natural $\alpha(t)$ puede ser negativo en un período, como en el período de casi hibernación, a condición de que el promedio de $\alpha(t)-\frac{\varrho_0(t)^2+\varrho_1(t)^2}{2}$ en el intervalo $[0,T]$ sea estrictamente positivo.
Por lo que concierne la condición [IV], para el modelo de presa-depredador, generalmente consideramos el caso $c_2>0$. Pero el resultado puede generalizarse al caso $c_2\le 0$. La relación $c_2<0$ correspondería al caso en que los depredadores tuvieran otras fuentes de alimentación y su índice de crecimiento demográfico fuera positivo en promedio incluso cuando la presa representada por X está ausente.

3. RESULTADO PRINCIPAL

El resultado principal de este trabajo es el siguiente:

Teorema A. *Si se cumplen las condiciones [I], [II], [III], [IV], el sistema de ecuaciones* (2.3) *admite una solución periódica* (ξ,η).

Es claro que, si (ξ,η) es una solución periódica (ξ,η) del sistema de ecuaciones (2.3), poniendo $X=e^\xi$ y $Y=e^\eta$, obtendremos una solución periódica (X,Y) del sistema de ecuaciones (2.1) y tendremos

$$X>0,\quad Y>0\qquad \text{c.s.},$$

como el significado de una población exige.

Para demostrar el teorema, utilizaremos la transformación de las ecuaciones (2.3). En efecto, si ponemos

$$Q_1(t)=\int_0^t\Big[c_1-\alpha(t')+\frac{\varrho_0(t')^2+\varrho_1(t')^2}{2}\Big]dt',\tag{3.1}$$

$$Q_2(t)=\int_0^t\Big[-c_2+\gamma(t')+\frac{\sigma_0(t')^2+\sigma_2(t')^2}{2}\Big]dt',\tag{3.2}$$

$$\vartheta(t)=\xi(t)+Q_1(t),\qquad \zeta(t)=\eta(t)+Q_2(t),\tag{3.3}$$

tendremos

$$d\vartheta(t) = d\xi(t) + \frac{dQ_1(t)}{dt}dt = d\xi(t) + \Big[c_1 - \big(\alpha(t) - \frac{\varrho_0(t)^2 + \varrho_1(t)^2}{2}\big)\Big]dt.$$

Por lo tanto, de la primera ecuación de (2.3) deducimos

$$d\vartheta(t) = [c_1 - \beta(t)e^{\eta(t)} - \mu(t)e^{\xi(t)}]dt + \varrho(t)dW. \tag{3.4}$$

De manera análoga obtenemos

$$d\zeta(t) = [-c_2 + \delta(t)e^{\xi(t)} - \nu(t)e^{\eta(t)}]dt + \sigma(t)dW. \tag{3.5}$$

Dado que

$$\xi = \vartheta - Q_1, \qquad \eta = \zeta - Q_2,$$

podemos reescribir las ecuaciones (3.4)–(3.5) en la forma

$$d\vartheta(t) = [c_1 - \beta(t)e^{-Q_2(t)}e^{\zeta(t)} - \mu(t)e^{-Q_1(t)}e^{\vartheta(t)}]dt + \varrho(t)dW, \tag{3.6}$$

$$d\zeta(t) = [-c_2 + \delta(t)e^{-Q_1(t)}e^{\vartheta(t)} - \nu(t)e^{-Q_2(t)}e^{\zeta(t)}]dt + \sigma(t)dW. \tag{3.7}$$

Vamos a demostrar el teorema A, utilizando las ecuaciones (3.6)–(3.7).

4. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA

Demostración del teorema A. Vamos a demostrar el teorema, aplicando el teorema de Khas'minskii. Para esto es esencial construir una función que verifique las condiciones del teorema de Khas'minskii (la llamamos "*función de Khas'minskii*"). La idea esencial de una función de Khas'minskii para el sistema de ecuaciones estocásticas del modelo de presa-depredador fue dada en [11]. Pero para mostrar de manera clara la posibilidad de construir una función de Khas'minskii, vamos a ilustrar de manera explícita y detallada la posibilidad de su construcción.

Para construir una función de Khas'minskii para el sistema de ecuaciones (3.6)–(3.7) (o para un sistema equivalente), ante todo, por la conveniencia del cálculo, introducimos dos números $\overline{\vartheta}^*$ y $\overline{\zeta}^*$ definidos por

$$\overline{\vartheta}^* = \log\,\max(c_2, 1) - \log(\inf \delta(t)) + \log 2 + \sup Q_1(t),$$

$$\overline{\zeta}^* = \log c_1 - \log(\sup \beta(t)) - \log 2 + \inf Q_2(t),$$

es decir, dos números $\overline{\vartheta}^*$ y $\overline{\zeta}^*$ tales que

$$2\max(c_2, 1) = \inf \delta(t)e^{-\sup Q_1(t)}e^{\overline{\vartheta}^*}, \qquad \frac{c_1}{2} = \sup \beta(t)e^{-\inf Q_2(t)}e^{\overline{\zeta}^*}. \tag{4.1}$$

Aquí, así como en lo sucesivo (donde no hay riesgo de equívoco), para no pesar la notación, simplemente escribimos inf y sup en lugar de $\inf_{0\le t\le T}$ et $\sup_{0\le t\le T}$.

Ponemos también

$$x = \vartheta - \overline{\vartheta}^*, \qquad y = \zeta - \overline{\zeta}^*.$$

Con estas notaciones las ecuaciones (3.6)–(3.7) se pueden escribir en la forma

$$dx(t) = [c_1 - \beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^{y(t)} - \mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^{x(t)}]dt + \varrho(t)dW, \tag{4.2}$$

$$dy(t) = [-c_2 + \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^{x(t)} - \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^{y(t)}]dt + \sigma(t)dW, \tag{4.3}$$

donde

$$\widetilde{Q}_1(t) = Q_1(t) - \overline{\vartheta}^*, \qquad \widetilde{Q}_2(t) = Q_2(t) - \overline{\zeta}^*. \tag{4.4}$$

Para construir una función de Khas'minskii, utilizamos igualmente las coordenadas polares $(r, \varphi) \in]0, \infty[\times[0, 2\pi[$ para indicar los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$, es decir, (x, y) será representado por

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Vamos a elegir seis números $\overline{\varphi}_j \in [0, 2\pi[$, $j = 1, \cdots, 6$, y un número estrictamente positivo ε_φ que satisfagan las desigualdades

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} < \overline{\varphi}_1 < \overline{\varphi}_1 + \varepsilon_\varphi < \frac{\pi}{2} < \overline{\varphi}_2 < \overline{\varphi}_2 + \varepsilon_\varphi < \overline{\varphi}_3 = \pi < \overline{\varphi}_3 + \varepsilon_\varphi < \\ < \overline{\varphi}_4 < \overline{\varphi}_4 + \varepsilon_\varphi < \overline{\varphi}_5 = \frac{3\pi}{2} < \overline{\varphi}_5 + \varepsilon_\varphi < \overline{\varphi}_6 < \overline{\varphi}_6 + \varepsilon_\varphi < 2\pi \end{aligned} \tag{4.5}$$

y permitan construir una curva poligonal cerrada y convexa Γ trazada de la manera indicada en el siguiente (naturalmente necesitamos mostrar que es posible elegir estos números).

La curva Γ se debe construir de la manera siguiente. Provisionalmente supongamos que $\overline{\varphi}_j$, $j = 1, \cdots, 6$, y ε_φ que satisfacen (4.5) son dados. Se definan las semirrectas l_j, $j = 1, \cdots, 6$, por

$$l_j = \{\, (r, \varphi) \in \Pi_{(r,\varphi)} \,|\, \varphi = \overline{\varphi}_j + \frac{\varepsilon_\varphi}{2} \,\},$$

y se pongan

$$a_3 = \inf \frac{\nu(t)}{\beta(t)}, \qquad a_5 = \inf \frac{\delta(t)}{\mu(t)}. \tag{4.6}$$

Primero tracemos el segmento

$$\Gamma_1^+ = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 1,\ 0 \le y \le \overline{B}_1 \,\}, \qquad \overline{B}_1 = \mathrm{tg}(\overline{\varphi}_1 + \frac{\varepsilon_\varphi}{2}),$$

es decir, el segmento que satisface la ecuación $x = 1$ y une el punto $(1, 0)$ en el eje x (positivo) y el punto $(1, \overline{B}_1) \equiv (\overline{A}_1, \overline{B}_1)$ en la semirrecta l_1.

Luego, consideremos la recta representada por la ecuación $y = \overline{B}_1$ y denotemos por $(\overline{A}_2, \overline{B}_1) \equiv (\overline{A}_2, \overline{B}_2)$ el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta l_2. Denotemos por Γ_2 el segmento que une $(\overline{A}_1, \overline{B}_1)$ y $(\overline{A}_2, \overline{B}_2)$.

Luego, consideremos la recta representada por la ecuación $-a_3 x + y = -a_3\overline{A}_2 + \overline{B}_2$ y denotemos por $(\overline{A}_3, \overline{B}_3)$ el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta l_3. Denotemos por Γ_3 el segmento que une $(\overline{A}_2, \overline{B}_2)$ y $(\overline{A}_3, \overline{B}_3)$.

Luego, consideremos la recta representada por la ecuación $x = \overline{A}_3$ y denotemos por $(\overline{A}_3, \overline{B}_4) \equiv (\overline{A}_4, \overline{B}_4)$ el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta l_4. Denotemos por Γ_4 el segmento que une $(\overline{A}_3, \overline{B}_3)$ y $(\overline{A}_4, \overline{B}_4)$.

Luego, consideremos la recta representada por la ecuación $-a_5 x - y = -a_5\overline{A}_4 - \overline{B}_4$ y denotemos por $(\overline{A}_5, \overline{B}_5)$ el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta l_5. Denotemos por Γ_5 el segmento que une $(\overline{A}_4, \overline{B}_4)$ y $(\overline{A}_5, \overline{B}_5)$.

Luego, consideremos la recta representada por la ecuación $y = \overline{B}_5$ y denotemos por $(\overline{A}_6, \overline{B}_5) \equiv (\overline{A}_6, \overline{B}_6)$ el punto de intersección entre esta recta y la semirrecta l_6. Denotemos por Γ_6 el segmento que une $(\overline{A}_5, \overline{B}_5)$ y $(\overline{A}_6, \overline{B}_6)$.
Provisionalmente definamos Γ_1^- como el segmento que une el punto $(\overline{A}_6, \overline{B}_6)$ y el punto $(1, 0)$ y, poniendo $\Gamma_1 = \Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+$, definamos la curva cerrada

$$\Gamma = \bigcup_{j=1}^{6} \Gamma_j.$$

Trazando los segmentos Γ_1^+, Γ_2, Γ_3, Γ_4 y Γ_5 con los valores provisionales de $\overline{\varphi}_1, \cdots, \overline{\varphi}_5$ y ε_φ, se observa que, si fijamos $\overline{\varphi}_1$, $\overline{\varphi}_2$ y $\overline{\varphi}_4$, por ejemplo $\overline{\varphi}_1 = \frac{\pi}{3}$, $\overline{\varphi}_2 = \frac{2\pi}{3}$, $\overline{\varphi}_4 = \frac{4\pi}{3}$ ($\overline{\varphi}_3$ y $\overline{\varphi}_5$ ya estan fijados), es posible elegir un ε_φ suficientemente pequeño para que se verifique

$$0 < \frac{\overline{B}_5}{\operatorname{tg}(2\varepsilon_\varphi - \frac{\pi}{2})} = \frac{\overline{B}_5}{\operatorname{tg}(\overline{\varphi}_5 + 2\varepsilon_\varphi)} \leq 1.$$

Por lo tanto, se puede elegir un $\overline{\varphi}_6$ tal que

$$\overline{\varphi}_5 + \varepsilon_\varphi < \overline{\varphi}_6 < \overline{\varphi}_6 + \varepsilon_\varphi < 2\pi, \qquad \operatorname{tg}(\overline{\varphi}_6 + \frac{\varepsilon_\varphi}{2}) = \overline{B}_5 = \overline{B}_6.$$

Con esta elección de $\overline{\varphi}_6$, tendremos

$$(\overline{A}_6, \overline{B}_6) = (1, \overline{B}_6);$$

por eso, Γ_1^- que une $(1, \overline{B}_6)$ y $(1, 0)$ estará en la recta $\{x = 1\}$. Es decir, podemos concluir que es posible elegir $\overline{\varphi}_1, \cdots, \overline{\varphi}_6$ y ε_φ que satisfacen (4.5) y permiten construir una curva poligonal cerrada y convexa Γ trazada con los procedimientos indicados arriba. Se observa que el origen $(0, 0)$ está en su interior.
Ahora definamos las regiones D_j, E_j $(j = 1, \cdots, 6)$ de manera siguiente:

$$D_1 = \{\, (r, \varphi) \in \Pi_{(r,\varphi)} \,|\, 0 \leq \varphi \leq \overline{\varphi}_1 \ \text{ o } \ \overline{\varphi}_6 + \varepsilon_\varphi \leq \varphi < 2\pi \,\},$$

$$D_j = \{\, (r, \varphi) \in \Pi_{(r,\varphi)} \,|\, \overline{\varphi}_{j-1} + \varepsilon_\varphi \leq \varphi \leq \overline{\varphi}_j \,\}, \qquad j = 2, \cdots, 6,$$

$$E_j = \{\, (r, \varphi) \in \Pi_{(r,\varphi)} \,|\, \overline{\varphi}_j \leq \varphi \leq \overline{\varphi}_j + \varepsilon_\varphi \,\}, \qquad j = 1, \cdots, 6,$$

donde

$$\Pi_{(r,\varphi)} =]0, \infty[\, \times [0, 2\pi[\,.$$

Recordando las propiedades de la curva cerrada Γ mencionadas arriba, definamos la curva cerrada Γ_0 de manera que Γ_0 sea de clase C^2, que su interior sea un conjunto convexo y que Γ_0 coincida con Γ en $\bigcup_{j=1}^{6} D_j$. Denotemos por $Int(\Gamma_0)$ y $Ext(\Gamma_0)$ el interior y el exterior de Γ_0 respectivamente. Leugo, definamos la función $U(x, y)$ en la cerradura de $Ext(\Gamma_0)$ de la manera siguiente:

$$U(x, y) = u \geq 1, \quad \text{si } \ (\frac{x}{u}, \frac{y}{u}) \in \Gamma_0, \tag{4.7}$$

o sea, en las coordenadas polares (r, φ),

$$U(r, \varphi) = \frac{r}{R_0(\varphi)}, \qquad \text{si} \;\; r \geq 1, \tag{4.8}$$

donde $R_0(\varphi)$ es la función que representa Γ_0 por la relación

$$\Gamma_0 = \{ (r, \varphi) \in]0, \infty[\times [0, 2\pi[\,|\, r = R_0(\varphi) \}.$$

Prolonguemos la función $U(x, y)$ en $Int(\Gamma_0)$ de manera que

$$U(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2), \qquad U(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.9}$$

Ahora consideremos el operador

$$L\varphi(x, y) = f_1(t; x, y)\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + f_2(t; x, y)\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} + \tag{4.10}$$

$$+\frac{\varrho_0(t)^2 + \varrho_1(t)^2}{2}\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\sigma_0(t)^2 + \sigma_2(t)^2}{2}\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} + \varrho_0(t)\sigma_0(t)\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y},$$

donde

$$f_1(t; x, y) = c_1 - \beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y - \mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x, \tag{4.11}$$

$$f_2(t; x, y) = -c_2 + \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x - \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y. \tag{4.12}$$

Lema 1. *La función $V(x, y) = U(x, y)^2$ verifica las relaciones*

$$V(x, y) \to \infty, \qquad \textit{cuando} \;\; \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty, \tag{4.13}$$

$$\sup_{\sqrt{x^2+y^2} \geq A} LV(x, y) \to -\infty \qquad \textit{cuando} \;\; A \to \infty. \tag{4.14}$$

Devolviendo a la siguiente sección la demostración del lema 1, concluimos aquí la demostración del teorema A. En efecto, según el teorema de Khas'minskii para la existencia de una solución periódica (Teorema 5.2 del Capítulo 3 de [6]), el lema 1 implica la existencia de una solución periódica $(x(t), y(t))$ del sistema de ecuaciones (4.2)–(4.3). Dado que $\overline{\vartheta}^*$ y $\overline{\zeta}^*$ son constantes y $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ son periódicas (véanse (3.1), (3.2)), los procesos

$$\xi(t) = \vartheta(t) - Q_1(t) = x(t) + \overline{\vartheta}^* - Q_1(t), \qquad \eta(t) = \zeta(t) - Q_2(t) = y(t) + \overline{\zeta}^* - Q_2(t)$$

también son periódicos y, en virtud de las relaciones entre el sistema (4.2)–(4.3), el sistema (3.6)–(3.7) y el sistema (2.3), constituyen una solución periódica de (2.3), lo que concluye la demostración del teorema. □

5. DEMOSTRACIÓN DEL LEMA

Demostración del lema 1. Primero se recuerda el lema que nos permite reducir la demostración del lema 1 a la demostración de las propiedades de la función $U(x,y)$ mencionadas en el lema 2.

Lema 2. *Si la función $U(x,y)$ verifica las relaciones siguientes:*

$$\textit{existe un compacto } K \textit{ de } \mathbb{R}^2 \textit{ y un número } \varepsilon_K > 0 \ \ \textit{tales que} \tag{5.1}$$

$$LU(x,y) \leq -\varepsilon_K, \qquad \textit{si} \ \ (x,y) \notin K,$$

$$\sup_{\sqrt{x^2+y^2} \geq A} U(x,y) \to \infty, \qquad \textit{cuando} \ \ A \to \infty, \tag{5.2}$$

$$\exists M > 0 \quad \textit{tal que} \quad \varrho_0(t)\sigma_0(t) \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \leq M \qquad \forall (x,y) \notin \mathbb{R}^2, \tag{5.3}$$

entonces la función $V(x,y) = U(x,y)^2$ verifica las relaciones (4.13)–(4.14).

Examinando la expresión de LV, se puede demostrar sin dificultad el lema 2. Para más detalles, véase por ejemplo [14].

Vamos a demostrar las relaciones (5.1)–(5.3). Se ve que la relación (5.2) resulta inmediatamente de la definición (4.7)–(4.9) de $U(x,y)$.
Por otra parte, recordemos que, como resulta del cálculo del gradiente de la función dada en (4.8), en $Ext(\Gamma_0)$ tenemos

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = \frac{\sin\varphi}{R_0(\varphi)^2} \frac{dR_0(\varphi)}{d\varphi} + \frac{\cos\varphi}{R_0(\varphi)}, \qquad \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{-\cos\varphi}{R_0(\varphi)^2} \frac{dR_0(\varphi)}{d\varphi} + \frac{\sin\varphi}{R_0(\varphi)}. \tag{5.4}$$

Dado que en (5.4) todas las funciones en φ, por lo menos, son de clase C^1 y $\inf_{0\leq\varphi<2\pi} R_0(\varphi) > 0$, se ve que existe una constante M_1 tal que

$$|\nabla U(x,y)| \leq M_1 \qquad \forall (x,y) \in Ext(\Gamma_0).$$

Además, dado que la cerradura de $Int(\Gamma_0)$ es un conjunto compacto y que $U(x,y)$ es de clase C^2 por hipótesis, esta claro que existe una constante M_1' tal que

$$|\nabla U(x,y)| \leq M_1' \qquad \forall (x,y) \in \overline{Int(\Gamma_0)}.$$

Por lo tanto, se concluye que la condición (5.3) está verificada.
Para demostrar la relación (5.1), ponemos

$$L_0 U(x,y) = f_1(t;x,y) \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} + f_2(t;x,y) \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \tag{5.5}$$

y observemos que en $D_j \cap Ext(\Gamma_0)$, $j = 1, \cdots, 6$, tenemos

$$\nabla U = d_j \qquad \text{en} \ \ D_j \cap Ext(\Gamma_0), \tag{5.6}$$

donde

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d_2 = c_{d2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad d_3 = c_{d3} \begin{pmatrix} -a_3 \\ 1 \end{pmatrix} = c_{d3} \begin{pmatrix} -\inf \frac{\nu(t)}{\beta(t)} \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$d_4 = c_{d4}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad d_5 = c_{d5}\begin{pmatrix} -a_5 \\ -1 \end{pmatrix} = c_{d5}\begin{pmatrix} -\inf \frac{\delta(t)}{\mu(t)} \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad d_6 = c_{d6}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

aquí c_{dj}, $j = 2, \cdots, 6$, son constantes estrictamente positivas. Por eso, en $D_j \cap Ext(\Gamma_0)$, la función $L_0U(x, y)$ tiene la expresión $L_0U(x, y) = \lambda_j(t; x, y)$,

$$\lambda_1(t; x, y) = c_1 - \beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y - \mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x,$$

$$\lambda_2(t; x, y) = c_{d2}[-c_2 + \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x - \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y],$$

$$\lambda_3(t; x, y) = c_{d3}\Big[(-\inf_{0\le t'\le T}\frac{\nu(t')}{\beta(t')})[c_1 - \beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y - \mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x] +$$

$$+[-c_2 + \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x - \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y]\Big],$$

$$\lambda_4(t; x, y) = c_{d4}\big[-c_1 + \beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y + \mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x\big],$$

$$\lambda_5(t; x, y) = c_{d5}\Big[-\inf_{0\le t'\le T}\frac{\delta(t')}{\mu(t')}\big[c_1 - \beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y - \mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x\big] +$$

$$+c_2 - \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x + \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y\Big],$$

$$\lambda_6(t; x, y) = c_{d6}\Big[c_2 - \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x + \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y\Big].$$

Examinemos el comportamiento de $\lambda_j(t; x, y)$ en G_j, $j = 1, \cdots, 6$, donde

$$G_1 = Ext(\Gamma_0) \cap (E_6 \cup D_1 \cup E_1), \qquad G_j = Ext(\Gamma_0) \cap (E_{j-1} \cup D_j \cup E_j) \quad (j = 2, \cdots, 6). \tag{5.7}$$

Primero, recordando que $\widetilde{Q}_1(t)$ es acotado (véanse (3.1), (4.4)) y teniendo en cuenta la condición [II], se ve que existe una constante $\overline{x}_0^{(1)}$ tal que

$$\lambda_1(t; x, y) \le -1 \qquad \text{si} \;\; x \ge \overline{x}_0^{(1)}, \;\; (x, y) \in G_1. \tag{5.8}$$

En G_2 tenemos las desigualdades $x \le \frac{y}{\mathrm{tg}\overline{\varphi}_1}$, $\frac{1}{\mathrm{tg}\overline{\varphi}_1} < 1$. Por eso, recordando que $\delta(t)$, $\widetilde{Q}_1(t)$ y $\widetilde{Q}_2(t)$ son acotados (véanse [I], (3.1), (3.2), (4.4)) y teniendo en cuenta la condición [II], se ve que existe una constante $\overline{y}_0^{(2)}$ tal que

$$\lambda_2(t; x, y) \le -1 \qquad \text{si} \;\; y \ge \overline{y}_0^{(2)}, \;\; (x, y) \in G_2. \tag{5.9}$$

Por lo que concierne $\lambda_3(t; x, y)$, se observa que

$$(-\inf_{0\le t'\le T}\frac{\nu(t')}{\beta(t')})(-\beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y) - \nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y =$$

$$= \beta(t)\Big(\inf_{0\le t'\le T}\frac{\nu(t')}{\beta(t')} - \frac{\nu(t)}{\beta(t)}\Big)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y \le 0.$$

Por otra parte, en virtud de la condición [IV], tenemos

$$-\inf_{0\le t'\le T}\frac{\nu(t')}{\beta(t')}c_1 - c_2 \equiv -\overline{\varepsilon}^{(3)} < 0.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la relación

$$\Big(\inf_{0\le t'\le T}\frac{\nu(t')}{\beta(t')}\mu(t) + \delta(t)\Big)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x \to 0, \qquad \text{cuando} \;\; x \to -\infty,$$

se ve que existe un número (negativo) $\overline{x}_0^{(3)}$ tal que

$$\lambda_3(t;x,y) \leq \frac{-c_{d3}\overline{\varepsilon}^{(3)}}{2} \qquad \text{si } \ x \leq \overline{x}_0^{(3)}, \ \ (x,y) \in G_3. \tag{5.10}$$

En G_4 tenemos $e^y \leq 1$. Por eso la definición de $\widetilde{Q}_2(t)$ (véanse (4.4) y (4.1)) implica que

$$\beta(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y \leq \frac{c_1}{2} \qquad \text{en } \ G_4.$$

Por lo tanto, recordando que $c_1 > 0$ (véase [III]) y $\mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, podemos elegir un número (negativo) $\overline{x}_0^{(4)}$ tal que

$$\lambda_4(t;x,y) \leq \frac{-c_{d4}c_1}{4} \qquad \text{si } \ x \leq \overline{x}_0^{(4)}, \ \ (x,y) \in G_4. \tag{5.11}$$

Por lo que concierne $\lambda_5(t;x,y)$, se observa que

$$\inf_{0\leq t'\leq T}\frac{\delta(t')}{\mu(t')}\mu(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x - \delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x = \mu(t)\Big(\inf_{0\leq t'\leq T}\frac{\delta(t')}{\mu(t')} - \frac{\delta(t)}{\mu(t)}\Big)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x \leq 0.$$

Por otra parte, la segunda desigualdad de [IV] implica que

$$-\inf_{0\leq t'\leq T}\frac{\delta(t')}{\mu(t')}c_1 + c_2 \equiv -\overline{\varepsilon}^{(5)} < 0.$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta la relación

$$\Big(\inf_{0\leq t'\leq T}\frac{\delta(t')}{\mu(t')}\beta(t) + \nu(t)\Big)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y \to 0, \qquad \text{cuando } \ y \to -\infty,$$

se ve que existe un número (negativo) $\overline{y}_0^{(5)}$ tal que

$$\lambda_5(t;x,y) \leq \frac{-c_{d5}\overline{\varepsilon}^{(5)}}{2} \qquad \text{si } \ y \leq \overline{y}_0^{(5)}, \ \ (x,y) \in G_5. \tag{5.12}$$

Al final, observamos que la definición de $\widetilde{Q}_1(t)$ (véanse (4.4) y (4.1)) implica

$$\delta(t)e^{-\widetilde{Q}_1(t)}e^x \geq 2c_2 \qquad \text{si } \ x \geq 0.$$

Dado que $\nu(t)e^{-\widetilde{Q}_2(t)}e^y \to 0$ cuando $y \to -\infty$, podemos elegir un número (negativo) $\overline{y}_0^{(6)}$ tal que

$$\lambda_6(t;x,y) \leq \frac{-c_{d6}c_1}{4} \qquad \text{si } \ y \leq \overline{y}_0^{(6)}, \ \ (x,y) \in G_6. \tag{5.13}$$

De las relaciones (5.8)–(5.13) se deduce que existen un compacto K_{L_0} de $\mathbb{R}^2$ y una constante $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tales que

$$\lambda_j(t;x,y) \leq -\widetilde{\varepsilon} \qquad \forall (x,y) \in G_j \backslash K_{L_0}, \ \ \forall j \in \{1,\cdots,6\}. \tag{5.14}$$

De (5.14) inmediatamente resulta que

$$L_0U(x,y) \leq -\widetilde{\varepsilon} \qquad \forall (x,y) \in \big(\bigcup_{j=1}^{6} D_j\big) \cap Ext(\Gamma_0)\backslash K_{L_0}. \tag{5.15}$$

En $E_j \cap Ext(\Gamma_0)$, expresemos $\nabla U(x,y)$ en la forma $ad_j + bd_{j'}$ ($j' = j+1$ si $j = 1, \cdots, 5$, $j' = 1$ si $j = 6$) (d_j son dados en (5.6)). Con eso podemos expresar $L_0U(x,y)$ en la forma

$$L_0U(x,y) = a\lambda_j(t;x,y) + b\lambda_{j'}(t;x,y), \qquad j' = j+1 \text{ si } j = 1, \cdots, 5, \quad j' = 1 \text{ si } j = 6.$$

Por otro lado, la convexidad del interno de Γ_0, junta a la pequeñez de ε_φ, exige que $a+b$ esté cerca de 1, en particular

$$a + b \geq \frac{1}{2}.$$

Por eso, de (5.14) deducimos que

$$L_0U(x,y) \leq -\frac{\widetilde{\varepsilon}}{2} \qquad \forall (x,y) \in Ext(\Gamma_0) \backslash K_{L_0}. \tag{5.16}$$

Para concluir, observemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y) \to 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}U(x,y) \to 0, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2}U(x,y) \to 0, \tag{5.17}$$

cuando $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$, como resulta del cálculo explicito (véase (4.8); véase también (5.4)). Recordando la definición de L y la de L_0 (véanse (4.10) y (5.5)), de (5.16) y (5.17) deducimos que existe un compacto K_L tal que

$$LU(x,y) \leq -\frac{\widetilde{\varepsilon}}{4} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash K_L, \tag{5.18}$$

lo que comprueba la relación (5.1).
Dado que las condiciones (5.1)–(5.3) se cumplen, del lema 2 se deduce el lema 1. $\square$

RECEIVED: FEBRUARY, 2018.
REVISED: JANUARY, 2019.

REFERENCIAS

[1] ANDRÉ, M. (1932): Le "bou-faroua", acarien nuisible au dattier en Algérie. **Rev. Botanique Appl. Agr. Col.**, 135, 940-949.

[2] BALDI, P. (2000): **Equazioni differenziali stocastiche e applicazioni (Quaderni UMI, 28)**, Pitagora Ed., Bologna.

[3] CHESSA, S. y FUJITA YASHIMA, H. (2002): Equazione stocastica di dinamica di popolazioni di tipo preda-predatore. **Boll. U, M. I.**, VIII-5-B, 789-804.

[4] GIKHMAN, I. I. y SKOROKHOD, A. V. (1968): **Stochastic differential equations** (en ruso), Izd. Naukova Dumka, Kiev. (Traducción inglesa (1972), Springer, Heidelberg.)

[5] HAMDOUS, S., MANCA, L. y FUJITA YASHIMA, H. (2010): Mesure invariante pour le système d'équations stochastiques du modèle de proie-prédateur avec diffusion spatiale. **Rend. Sem. Mat. Univ. Padova**, 124, 57-75.

[6] HAS'MINSKII (KHAS'MINSKII), R. Z. (1980): **Stochastic stability of differential equations** (translated from Russian), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn.

[7] IDDER, M. A. y PINTUREAU, B. (2008): Efficacité de la coccinelle Stethorus punctillum (Weise) comme prédateur de l'acarien Oligonychus afrasiaticus (McGregor) dans les palmeraies de la région d'Ouargla en Algérie. **Friuts**, 63, 85-92.

[8] KORICHI, F. (2015): Existence et unicité de la solution pour une classe d'équations stochastiques à coefficients définis par rapport à un ensemble fermé de temps. **Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino**, 73, 227-243

[9] KORICHI, F. y FUJITA YASHIMA, H. (2017): Solución periódica de las ecuaciones estocásticas con coeficientes definidos en una unión de intervalos cerrados. **Rev. Inv. Op.**, 38, pp. 320-330.

[10] ØKSENDAL, B. (2003): **Stochastic differential equations, an introduction with applications**, 6th Ed. Springer, Heidelberg.

[11] RUDNICKI, R. (2003): Long-time behaviour of a stochastic prey-predator model. **Stoch. Proc. Appl.**, 108, 93-107.

[12] SAHARAOUI, L. (1988): **Inventaire des coccinelles entomophages (Coleoptera- Coccinellidae) dans la plaine de Mitidja et aperçu bioécologique des principales espèces rencontrées, en vue d'une meilleure appréciation de leur rôle entomophage en Algérie**. Thèse de Doctorat, Univ. Nice, Nice.

[13] SAHARAOUI, L. y GOURREAU, J. M. (2000): Les coccinelles d'Algérie: inventaire et régime alimentaire. **Recherche Agron.**, 6, 11–27.

[14] TORNATORE, E., MANCA, L. y FUJITA YASHIMA, H. (2003): Comportamento asintotico della soluzione del sistema di equazioni stocastiche per due specie in competizione. **Rend. Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett.**, 136/137, 151-183.

[15] VOLTERRA, V. (1931): **Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie**. Gauthier-Villars, Paris.